

Regular Toroids

by Lajos Szilassi

Topologie structurale #13, 1986

Les toroïdes réguliers

Il est acquis que, sur les polyèdres réguliers, le même nombre d'arêtes sont adjacentes à chaque sommet, et que chaque face a le même nombre d'arêtes. Si aucune autre condition n'est imposée (ayant trait, par exemple, aux angles des faces ou aux arêtes), un polyèdre est alors **topologiquement régulier**. Dans cet article, nous traiterons de tels polyèdres, mais il nous faudra d'abord passer en revue certains concepts et certaines données simples se rapportant à ces polyèdres.

À travers toutes les discussions, nous utiliserons l'axiome selon lequel les arêtes des toroïdes sont des segments de droite et leurs faces sont planes.

Un polyèdre est dit **ordinaire** si deux points quelconques du solide polyédrique peuvent être reliés par une ligne brisée qui ne perce jamais la surface du polyèdre, et si, à chaque sommet, les faces qui renferment ce sommet constituent un cycle tel que les membres adjacents du cycle sont les faces adjacentes (c.-à-d. les faces ayant une arête commune). Sur un polyèdre ordinaire, chaque arête limite exactement deux faces.

Un polyèdre est **simple** s'il est ordinaire et topologiquement sphérique (c.-à-d. qu'il peut être converti en une sphère par une transformation continue), et si ses faces sont des polygones simples. (Le polygone simple est topologiquement un cercle.) Par exemple, les polyèdres convexes sont simples, mais les polyèdres simples ne sont pas tous convexes. Pour les polyèdres simples, la formule d'Euler

$$S - A + F = 2$$

se vérifie, S , A et F étant respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces.

Structural Topology #13, 1986

As is known, in regular polyhedra, the same number of edges meet at each vertex, and each face has the same number of edges. A polyhedron is **topologically regular** if no further conditions (e.g. on the angles of the faces or the edges) are imposed. In this article we shall deal with such polyhedra, but we must first consider some concepts and simple facts concerning polyhedra.

All the time we'll use the fact that the edges of the toroids are to be straight line segments and the faces are to be planar.

A polyhedron is called **ordinary** if any two points of the polyhedral body can be joined by a broken line not intersecting the surface of the polyhedron, and at each vertex, the faces containing that vertex form a cycle such that the adjacent members of the cycle are the adjacent faces (i.e. the faces with a common edge). In an ordinary polyhedron, each edge borders exactly two faces.

A polyhedron is **simple** if it is ordinary, topologically sphere-like (i.e. it can be converted to a sphere by continuous deformation), and its faces are simple polygons. (The simple polygon is topologically circle-like.) For example, convex polyhedra are simple, but not all simple polyhedra are convex. For simple polyhedra, Euler's formula

$$V - E + F = 2$$

holds, where V , E and F are the numbers of vertices, edges and faces, respectively.

À l'aide de cette formule, il est facile de montrer qu'il n'existe que cinq polyèdres simples topologiquement réguliers; chacun d'eux peut être construit avec des faces et des angles solides réguliers et congruents, mais cela ne découle pas de la formule d'Euler.

Un polyèdre ordinaire est appelé un **toroïde** s'il est topologiquement un tore (c.-à-d. qu'il peut être converti en un tore par une déformation continue), et si ses faces sont des polygones simples. Pour les toroïdes, la formule d'Euler devient

$$S - A + F = 0$$

(Nous aurions pu définir les toroïdes de façon plus générale comme des polyèdres ordinaires mais non simples dont la surface est connexe. Cette généralisation ne sera pas nécessaire ici.)

Dans une acception plus stricte, un toroïde est dit **régulier** si le même nombre d'arêtes sont adjacentes à chaque sommet, et si chaque face a le même nombre d'arêtes.

Sur un toroïde, il ne faudrait pas s'attendre à ce que toutes les faces et tous les angles solides soient réguliers et congruents; le terme *régulier* y réfère évidemment à une propriété topologique.

Étudions maintenant certains des toroïdes réguliers les plus intéressants. (La plupart de ces toroïdes se trouvent dans [4], décrits en hongrois.)

1. Soit a , le nombre d'arêtes de chacune des faces d'un toroïde régulier, et b , le nombre d'arêtes adjacentes à chaque sommet de ce toroïde. Chacun des produits Fa et Sb sont égaux au double du nombre d'arêtes, puisque chaque arête est adjacente à deux faces et à deux sommets. Il découle donc de la formule d'Euler pour les toroïdes que

$$\frac{2A}{a} + \frac{2A}{b} - A = 0$$

Puisque $A > 0$, l'équation se transforme en équation diophantienne

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

À cette équation, il n'existe que trois solutions qui sont des nombres entiers et satisfont aux conditions $a \geq 3$ et $b \geq 3$. D'où il est possible de distinguer trois classes de toroïdes réguliers, selon les nombres d'arêtes adjacentes à chaque face et à chaque sommet:

- la classe T_1 : $a = 3, b = 6$
- la classe T_2 : $a = 4, b = 4$
- la classe T_3 : $a = 6, b = 3$

Il est acquis qu'il n'existe que trois façons de paver le plan avec des polygones réguliers, soit avec des triangles réguliers, des carrés et des hexagones réguliers. (Chaque arête doit limiter exactement deux faces; si cette condition est omise, les pavages de triangles et de carrés ne sont plus uniques.)

Application of this relationship readily shows that there are only five topologically regular, simple polyhedra, and each of them can be realized so that its faces and solid angles are regular and congruent, but it does not follow from Euler's formula.

An ordinary polyhedron is called a **toroid** if it is topologically torus-like (i.e. it can be converted to a torus by continuous deformation), and its faces are simple polygons. For toroids, Euler's formula is modified to

$$V - E + F = 0$$

(We could have defined toroids more generally as ordinary, but not simple polyhedra, the surface of which is connected. This generalization will not be needed here.)

A toroid, in the stricter sense, is said to be **regular** if the same number of edges meet at each vertex, and each face has the same number of edges.

Studying toroids, we cannot expect all of the faces or solid angles to be regular and congruent, so the description *regular* here is clearly a topological property.

Let us consider some of the more interesting regular toroids. (Most of these toroids can be found in Hungarian in [4].)

1. Assume each face of a regular toroid has a edges, and at each vertex exactly b edges meet. The products Fa and Vb are each equal to twice the number of edges, since every edge is incident with two faces and two vertices. Hence, from Euler's formula for toroids above,

$$\frac{2E}{a} + \frac{2E}{b} - E = 0$$

Since $E > 0$, this leads to the Diophantine equation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

This equation has only three integral solutions satisfying the conditions $a \geq 3$ and $b \geq 3$. Hence, we can distinguish three classes of regular toroids, according to the numbers of edges incident with each face and each vertex:

- class T_1 : $a = 3, b = 6$
- class T_2 : $a = 4, b = 4$
- class T_3 : $a = 6, b = 3$

As is known, there are only three ways of tiling the plane with regular polygons; namely, with regular triangles, squares and regular hexagons. (Every edge must border exactly two faces; if this condition is omitted the tilings with triangles and squares are not unique.)

Ces trois pavages correspondent topologiquement aux trois classes précédentes. Prélever un rectangle *suffisamment grand* d'un de ces pavages plans, et coller les unes aux autres les arêtes opposées de ce rectangle, produit un réseau topologiquement régulier sur un tore. (Deux des arêtes opposées du rectangle sont d'abord collées l'une à l'autre, ce qui produit un tube cylindrique, puis les deux autres arêtes, qui sont alors des cercles, sont collées l'une à l'autre, ce qui produit un tore.) Si le réseau régulier sur un tore qui en résulte comporte suffisamment de régions, alors, en principe, rien n'empêche de le construire avec des surfaces planes. Nous pouvons dire, par conséquent, que chacune de ces trois classes renferme un nombre infini de toroïdes réguliers. Toutefois, il est intéressant de déterminer pour chaque classe le nombre minimum de faces ou de sommets requis pour construire un toroïde régulier de cette classe, en ajoutant peut-être une condition contraignant les faces et les angles solides à appartenir à aussi peu de classes de congruence que possible.

2. Puisqu'à chaque sommet d'un toroïde régulier de classe T_1 il y a exactement six arêtes adjacentes, alors un tel toroïde doit avoir au moins sept sommets. Le polyèdre de Császár, [1], [2] et [3] (pp. 244-246), est un tel toroïde n'ayant que sept sommets. Ce polyèdre appartient effectivement à la classe T_1 , puisqu'une paire quelconque de ses sommets sont liés par une arête, et que par conséquent six arêtes sont adjacentes à chaque sommet. Le nombre de ses sommets est le plus petit possible, et non seulement pour la classe T_1 , puisqu'il est clair qu'il n'existe aucun toroïde ayant moins de sept sommets.

Construit à partir des données publiées par Ákos Császár, professeur à l'Université de Budapest et membre de l'Académie des sciences de Hongrie [1], le toroïde noté C_1 semble passablement chargé. Il comporte un angle dièdre supérieur à 352° . Nous avons conçu un programme informatique afin de trouver une variante moins chargée. À partir des coordonnées rectangulaires des sept sommets, le programme vérifie d'abord si le polyèdre défini par ces sept points comporte des auto-intersections. S'il n'en comporte pas, alors le programme calcule les longueurs des arêtes, les angles entre les arêtes et les angles dièdres du polyèdre. Le **Tableau 1** affiche ces données pour trois variantes du polyèdre. La variante C_2 est obtenue par une légère modification des coordonnées des sommets de C_1 , alors que la variante C_3 est essentiellement différente des deux autres.

Par commodité, au **Tableau 1**, les sommets sont numérotés. Ceci permet de décrire les faces triangulaires du polyèdre par des triplets de nombres. Pour définir le polyèdre de façon non équivoque, il ne suffit pas de donner les coordonnées des sept sommets; il faut aussi savoir lesquels des $\binom{7}{3} = 35$ triangles déterminés par les sept points sont les 14 qui constituent la surface du polyèdre.

Il est à noter que, pour les trois variantes, les sommets des paires 1 et 6, 2 et 5, et 3 et 4 sont disposés selon une symétrie de réflexion par rapport à l'axe des z du système de coordonnées; de même, les faces notées l'une au-dessous de l'autre dans les deux dernières lignes du **Tableau 1** constituent des paires congruentes. Les angles solides qui correspondent aux susdites paires de sommets sont aussi congruents. Par conséquent, dans les trois variantes, les faces appartiennent à sept classes de congruence, et les angles solides à quatre classes de congruence.

These three tilings correspond topologically to the three classes above. If a *sufficiently large* rectangle is taken from such a tiled plane, and the opposite edges are glued together, we obtain a map drawn on a torus which is topologically regular. (Two opposite edges of the rectangle are glued together first, to form a cylindrical tube, and then the remaining two, now circular edges are glued together, yielding a torus.) If the resulting regular map drawn on the torus has sufficiently many regions, there is no obstacle in principle to its realization with plane surfaces. We may say, therefore, that each of the three classes contains an infinite number of regular toroids. However, it is interesting to determine for each class the lowest number of faces or vertices required to construct a regular toroid in that class, possibly with the restricting condition that the faces or solid angles belong to as few congruence classes as possible.

2. At every vertex of a regular toroid in class T_1 exactly six edges meet, so that such a toroid has at least seven vertices. The Császár polyhedron [1], [2], [3] (pp. 244-246) is such a toroid with only seven vertices. This polyhedron does indeed belong to class T_1 , for any two of its vertices are joined by an edge, and thus six edges meet at each vertex. The number of its vertices is the lowest possible not only in class T_1 ; it can readily be seen that a toroid with less than seven vertices does not exist.

The toroid, denoted by C_1 , which is constructed on the basis of the data published by professor Ákos Császár at Budapest University who is a member of the Hungarian Academy of Sciences [1], appears fairly crowded. It has a dihedral angle which is greater than 352° . We have prepared a computer program to search for a less crowded variant. Given the rectangular coordinates of the seven vertices, the program first checks whether the polyhedron defined by the seven points intersects itself. If it does not, the program then calculates the lengths of the edges, the interedge angles and the dihedral angles of the polyhedron. **Table 1** shows the data of three variants of the polyhedron. Variant C_2 can be obtained from C_1 by a slight modification of the coordinates of the vertices, whereas C_3 is essentially different from the other two.

For convenience, in **Table 1**, the vertices are denoted by numbers. Thus the triangular faces of the polyhedron can be described by triples of numbers. To define the polyhedron unambiguously, it is not sufficient to give the coordinates of the seven vertices; it is also necessary to know which of the $\binom{7}{3} = 35$ triangles determined by the seven points are the 14 comprising the surface of the polyhedron.

It may be observed that in all three variants vertices 1 and 6, 2 and 5 and 3 and 4, are reflected images of each other relative to the z axis of the coordinate system; accordingly, the pairs of faces written one under the other in the last two lines of **Table 1** are congruent. The solid angles corresponding to the foregoing vertex pairs are also congruent. Therefore, in all three variants the faces belong to seven congruence classes, and the solid angles to four congruence classes.

Un examen des données du **Tableau 1** révèle que C_1 et C_2 comportent des angles dièdres concaves sur les mêmes arêtes. Il est possible d'obtenir chacune de ces deux variantes à partir de l'autre par un mouvement continu des sommets durant lequel aucune auto-intersection de la surface du polyèdre ne se produit. La variante C_3 a été obtenue par un réarrangement considérable des sommets, et cette variante n'a en commun avec les deux autres que ses propriétés topologiques. Il a fallu une certaine dose d'intuition pour la découvrir. Le lecteur sera à même de constater les différences entre ces variantes s'il fabrique leurs maquettes.

La variante C_2 (**Figure 1**) est effectivement un peu moins chargée que C_1 ; de plus, certaines de ses faces sont plutôt spéciales. Par exemple, le plus petit angle entre les arêtes sur C_1 , l'angle 2-7-3 $\angle$, est à peine plus grand que 7° . Sur C_2 , ce triangle (2 3 7), qui est critique du point de vue des angles entre les arêtes, a été transformé en un triangle isocèle dont les angles à la base sont plus grands que 15° . Sur C_2 , l'angle du sommet du triangle isocèle (1 6 2) est de 120° , alors que le triangle (1 5 7) est un triangle isocèle rectangle.

An examination of the data in **Table 1** reveals that C_1 and C_2 have concave dihedral angles at the same edges. These two variants can be transformed into each other by a continuous movement of the vertices so that during the process the surface of the polyhedron never becomes selfintersecting. Variant C_3 was obtained by a considerable rearrangement of the vertices, and this variant agrees with the other two only in its topological properties. To find it required some intuition. If the reader makes these models he can see the differences between them.

Variant C_2 (**Figure 1**) is indeed somewhat less crowded than C_1 ; moreover, some of its faces are rather special. For example, the smallest interedge angle in C_1 , angle 2-7-3 $\angle$, is scarcely larger than 7° . In C_2 this triangle (2 3 7), which is critical as regards the interedge angles, has been transformed to an isosceles triangle with base angles larger than 15° . In C_2 , the vertex angle of the isosceles triangle (1 6 2) is 120° , while the triangle (1 5 7) is a right-angled isosceles triangle.

Tableau 1
Les données du polyèdre exempt de diagonales

vertex • sommets	C_1			C_2			C_3		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	3	-3	0	$4\sqrt{13}$	0	0	-3	4	$11 \cdot \sqrt{2}/2$
2	3	3	1	0	8	4	0	12	$12 \cdot \sqrt{2}$
3	1	2	3	-1	2	11	12	0	0
4	-1	-2	3	1	-2	11	-12	0	0
5	-3	-3	1	0	-8	4	0	-12	$12 \cdot \sqrt{2}$
6	-3	3	0	$-4\sqrt{13}$	0	0	3	-4	$11 \cdot \sqrt{2}/2$
7	0	0	15	0	0	20	0	0	$10 \cdot \sqrt{2}/3$

faces of the polyhedron • les faces du polyèdre

(1-6-2)	(1-4-2)	(2-4-5)	(1-3-4)	(1-5-7)	(5-4-7)	(4-6-7)
(6-1-5)	(6-3-5)	(5-3-2)	(6-4-3)	(6-2-7)	(2-3-7)	(3-1-7)

Table 1
Data of the polyhedron having no diagonal

edge • arête	C_1		C_2		C_3	
	edge length • longueur de l'arête	interfacial angle • angle dièdre	edge length • longueur de l'arête	interfacial angle • angle dièdre	edge length • longueur de l'arête	interfacial angle • angle dièdre
(1-6)	8.49	$153^\circ 28'$	30.98	$126^\circ 52'$	10	$76^\circ 8'$
(2-5)	8.49	$321^\circ 3'$	16	$343^\circ 44'$	24	$70^\circ 32'$
(3-4)	4.47	$253^\circ 24'$	4.47	$256^\circ 53'$	24	$54^\circ 26'$
(2-4) = (5-3)	6.71	$78^\circ 20'$	12.25	$69^\circ 8'$	24	$51^\circ 3'$
(2-3) = (5-4)	3.00	$216^\circ 23'$	9.27	$208^\circ 37'$	24	$52^\circ 43'$
(3-7) = (4-7)	12.21	$268^\circ 39'$	9.27	$279^\circ 25'$	12.89	$340^\circ 8'$
(2-7) = (5-7)	14.63	$18^\circ 17'$	17.89	$35^\circ 54'$	17.15	$74^\circ 25'$
(1-5) = (6-2)	6.08	$87^\circ 29'$	17.89	90°	18.69	$339^\circ 19'$
(1-2) = (6-5)	6.08	$44^\circ 17'$	17.89	$67^\circ 6'$	12.55	$156^\circ 51'$
(1-4) = (6-3)	5.10	$352^\circ 5'$	18.3	$343^\circ 23'$	12.55	$204^\circ 28'$
(1-3) = (6-4)	6.16	$58^\circ 7'$	19.92	$57^\circ 6'$	17.36	$41^\circ 40'$
(1-7) = (6-7)	15.59	$76^\circ 20'$	25.30	$56^\circ 50'$	5.86	$243^\circ 30'$

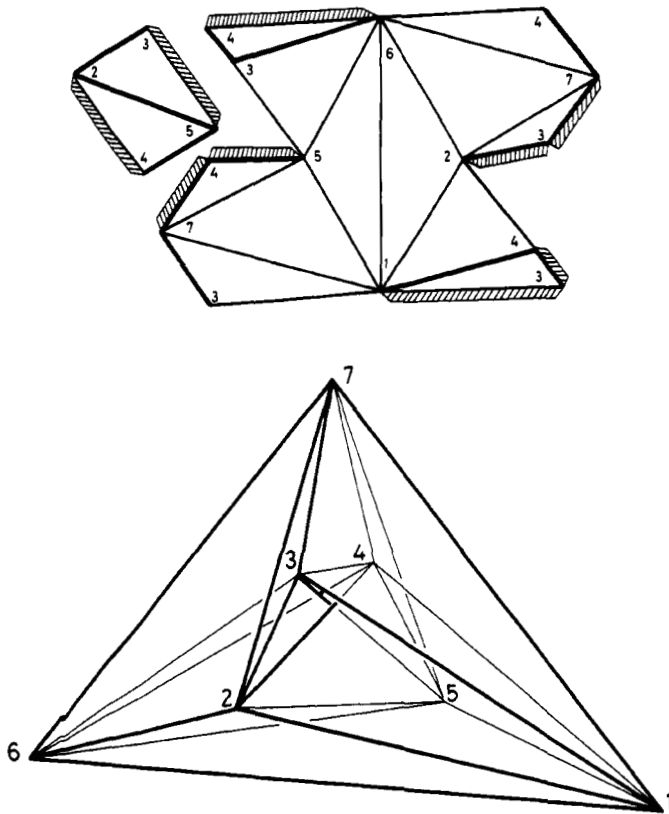


Figure 1 A toroid without diagonal, C_2 variant • Un toroïde sans diagonale, variante C_2 .

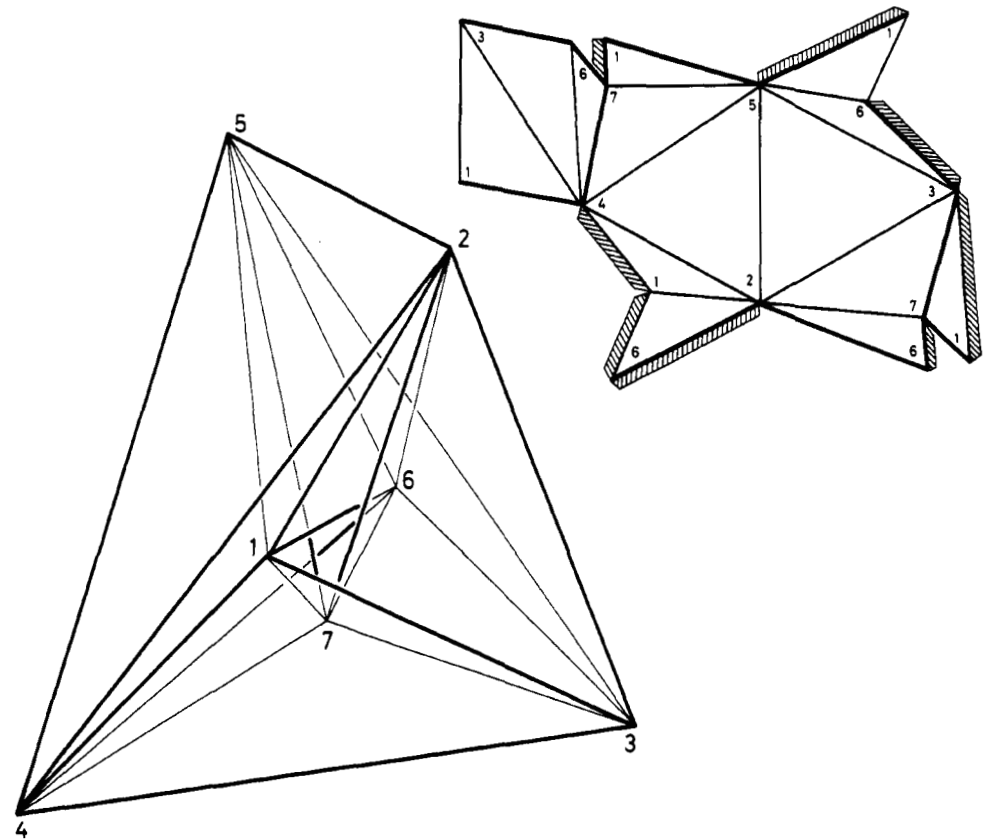


Figure 2 A toroid without diagonal, C_3 variant • Un toroïde sans diagonale, variante C_3 .

Les données du toroïde C_3 (Figure 2) ont été sélectionnées de sorte que les sommets 2, 5, 3 et 4 forment un tétraèdre régulier. Ici, le triangle *critique* de la construction est (1 4 2). Par un choix convenable de la position de la paire de sommets (1 6), ce triangle peut être transformé en un triangle isocèle dont les angles à la base sont plus grands que 17° . Sur les Figures 1 et 2, les traits gras des réseaux des polyèdres identifient les arêtes adjacentes à des angles dièdres concaves.

Reste à savoir s'il est possible d'obtenir un toroïde beaucoup moins chargé et exempt de diagonales grâce à des variations ou à des réarrangements des coordonnées.

The data of toroid C_3 (Figure 2) were selected so that vertices 2, 5, 3 and 4 form a regular tetrahedron. Here, the *critical* triangle of the construction is (1 4 2). By appropriate choice of the pair of vertices (1 6), this triangle could be made an isosceles triangle with base angles larger than 17° . The thick lines in the network of the polyhedra in Figures 1 and 2 denote edges with concave dihedral angles.

The question arises of whether a substantially less crowded, diagonal free toroid can be obtained by variation or rearrangement of the coordinates.

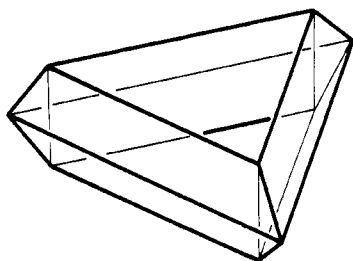


Figure 3 A toroid with minimal faces in class T_2 • Un toroïde de classe T_2 ayant un nombre minimal de faces.

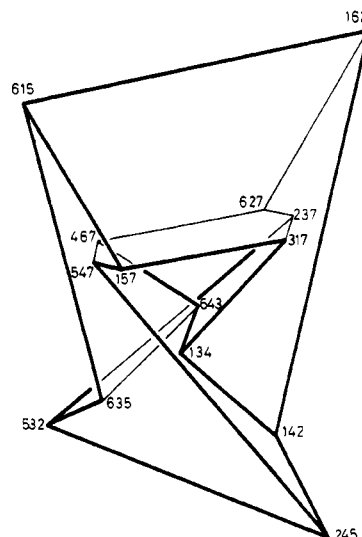


Figure 4 Toroid with seven faces topologically isomorphic with Heawood's seven colours toroidal map • Un toroïde à sept faces topologiquement isomorphe au réseau torique à sept couleurs de Heawood.

Tableau 2
Les équations des plans des
faces du toroïde dont deux
faces quelconques ont une
arête commune

Table 2
Equations of the facial planes
of the toroid in which any two
faces have a common edge

(1)	$4y + z = 12$
(2)	$-2x - z = 12$
(3)	$-5x + 5y - 7z = 21$
(4)	$5x - 5y - 7z = 21$
(5)	$2x - z = 12$
(6)	$-4y + z = 12$
(7)	$z = 2$

3. La classe T_2 des toroïdes réguliers est constituée des polyèdres ordinaires toriques sur lesquels quatre arêtes sont adjacentes à chaque sommet, et dont les faces sont des quadrilatères. Les toroïdes de ce type sont les plus faciles à construire.

Prenons un polygone (régulier, par exemple) à p côtés, et, autour d'une droite t qui, sans couper le polygone, se trouve dans le même plan que lui, faisons effectuer à ce polygone une rotation de $(k/q) \cdot 2\pi$, où $q \geq 3$ et est un entier, et $k = 1, 2, \dots, q$. Le toroïde qui en résulte est constitué de $p \cdot q$ trapèzes (ou rectangles); il est régulier et appartient à la classe T_2 . Par exemple, avec $p = q = 3$, le toroïde obtenu est celui de la Figure 3. C'est le membre de la classe T_2 ayant le plus petit nombre de faces, puisque tout toroïde de type T_2 comporte au moins neuf sommets (et neuf faces). (Chaque sommet est adjacent à quatre faces qui ensemble sont adjacentes à neuf sommets; dans le cas des polyèdres ordinaires, deux quelconques de ces neuf sommets doivent être distincts.)

Avec $p = 3$ et $q = 4$ (ou $p = 4$ et $q = 3$) la procédure décrite précédemment produit un toroïde régulier appartenant à T_2 et ayant 12 faces et 12 sommets. Toutefois, bien qu'il soit possible de tracer sur un tore un graphe à 10 ou 11 sommets (et à autant de régions) qui appartient à la classe T_2 , l'existence d'un toroïde régulier de classe T_2 à 10 ou 11 faces (ou sommets) n'est pas établie. Si ce toroïde existe, il faudra le construire par une méthode différente, puisqu'avec la présente méthode, F doit être le produit de deux entiers chacun ≥ 3 .

3. Class T_2 of regular toroids consists of those torus-like ordinary polyhedra in which four edges meet at each vertex and the faces are quadrilaterals. This type of regular toroids is the easiest to construct.

Let us take an (e.g. regular) p -sided polygon, and rotate it by $(k/q) \cdot 2\pi$ where q is an integer ≥ 3 , and $k = 1, 2, \dots, q$, about a straight line t which lies in the plane of the polygon, but does not intersect it. The resulting toroid, which consists of $p \cdot q$ trapezia (or rectangles), is regular and belongs to class T_2 . As an example, for $p = q = 3$ the toroid in Figure 3 is obtained. This is the member with the lowest number of faces in class T_2 , since every toroid of type T_2 has at least nine vertices (and nine faces). (Each vertex is incident with four faces which together have a total of nine vertices; for ordinary polyhedra any two of these nine vertices must be distinct.)

In the case $p = 3, q = 4$ (or $p = 4, q = 3$) the above procedure yields a regular toroid in T_2 with 12 faces and 12 vertices. However, it is not known whether there exist a regular toroid in T_2 with 10 or 11 faces (vertices), though a graph having 10 or 11 vertices (and regions), and which belongs to T_2 class can be drawn on torus. If so it would have to be obtained by a different method, since this one requires that F be a product of two integers each ≥ 3 .

4. Comme nous l'avons vu, la propriété la plus importante du polyèdre de Császár est qu'une paire quelconque de ses sommets sont liés par une arête. Il existe un lien très étroit, dit de dualité, entre ce polyèdre et le polyèdre de la classe T_3 ayant le plus petit nombre de faces. La principale caractéristique de ce dernier est qu'une paire quelconque de ses faces ont une arête commune (Figure 4). (Par exemple, l'octaèdre et le cube, ou le dodécaèdre et l'icosaèdre sont des paires de duals.)

La dualité signifie non seulement que les nombres de faces, de sommets et d'arêtes sont respectivement identiques aux nombres de sommets, de faces et d'arêtes du polyèdre de Császár, mais aussi que, si les plans des faces sont numérotés convenablement, les sommets du polyèdre peuvent être désignés par les mêmes triplets que ceux qui désignent les faces de son dual (Tableau 1). Par conséquent, pour définir le polyèdre sans équivoque, il suffit de donner les équations des sept plans des faces (Tableau 2). Les triplets précisent alors quels sont les trois plans qui se coupent pour produire chacun des sommets du polyèdre. Lorsque les coordonnées des sommets sont connues, il est facile de calculer les longueurs des arêtes et des diagonales des hexagones qui composent le polyèdre, ou toute autre donnée nécessaire à sa construction. Des descriptions des faces et de leur patron d'assemblage tirées des dessins de Stewart [3] (pp. 248-249) sont fournies à la Figure 5.

Ce polyèdre est lui aussi symétrique par rapport à l'axe des z du système de coordonnées. Par conséquent, ses faces appartiennent à quatre classes de congruence, et ses sommets à sept classes de congruence.

Puisqu'il est clair qu'il est impossible de construire un toroïde ayant moins de sept plans de face, ce polyèdre est donc celui qui a le plus petit nombre de faces, non seulement parmi les toroïdes de classe T_3 , mais parmi tous les toroïdes.

4. As we have seen, the most important property of the Császár polyhedron is that any two vertices are joined by an edge. There is a very close connection, so-called duality, between this polyhedron and the polyhedron with the lowest number of faces in class T_3 , the main characteristic of the latter being that any two faces have a common edge (Figure 4). (For instance, the octahedron and the cube, or the dodecahedron and the icosahedron are dual to each other.)

Duality means not only that the number of faces, vertices and edges agree in turn with the numbers of vertices, faces and edges of the Császár polyhedron, but also that, if the planes of the faces are suitably numbered, the vertices of the polyhedron can be given with the same triples as those giving the faces of its dual (Table 1). Hence, for the unambiguous definition of the polyhedron it is sufficient to give the equations of the seven facial planes (Table 2). The given triples show which three planes intersect to yield each vertex of the polyhedron. Knowing the coordinates of the vertices, we can easily calculate the lengths of the edges and diagonals of the hexagons constituting the polyhedron, or any other data necessary for its construction. The data of the faces and the network needed to fit them together are given in Figure 5, based on the drawings of Stewart [3] (pp. 248-249).

This polyhedron, too, is symmetrical about the z axis of the coordinate system. Thus, its faces belong to four congruence classes, and its vertices into seven congruence classes.

It can be seen that a toroid cannot be constructed with fewer than seven facial planes, hence this polyhedron has the lowest number of faces in any toroid, not only in class T_3 .

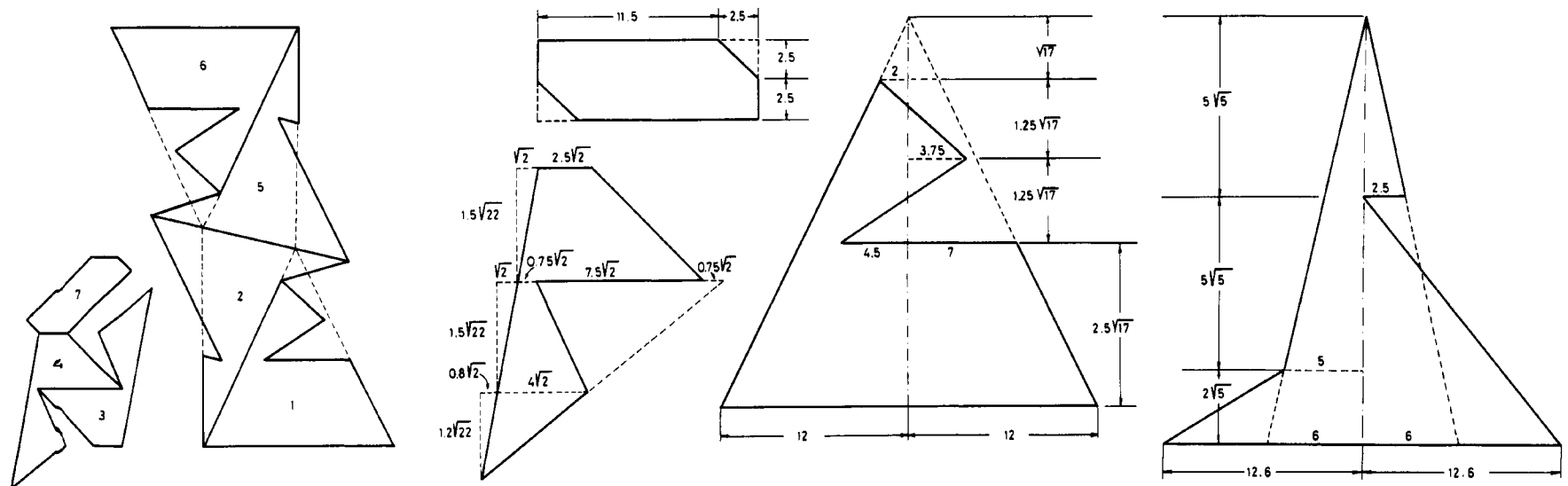


Figure 5 Data for making seven faces toroid • Les données pour fabriquer un toroïde à sept faces.

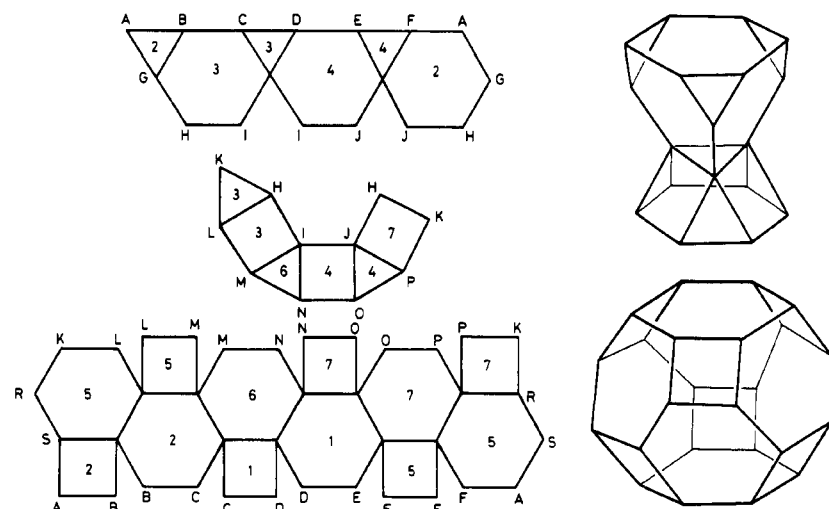


Figure 6 Realization of Heawood's map with a toroid having regular polygons • Une application du réseau de Heawood sur un tore constitué de polygones réguliers.

5. Au siècle dernier, divers problèmes relatifs au coloriage des réseaux ont été soulevés, par exemple le problème des quatre couleurs. En 1890, Heawood démontra qu'il suffit de sept couleurs pour colorier n'importe quel réseau tracé sur un tore. En même temps, il démontra aussi que sept couleurs sont aussi nécessaires, en traçant sur un tore un réseau constitué de sept régions, toutes adjacentes deux à deux, de sorte que pour obtenir le coloriage requis il fallait donner à chaque région une couleur différente. Grâce au polyèdre décrit plus tôt, le réseau à sept couleurs de Heawood peut être construit avec sept hexagones planaires simples, puisque le réseau torique de Heawood et ce tore sont topologiquement isomorphes.

Le réseau à sept couleurs de Heawood peut aussi être construit sur un tore dont toutes les faces sont des polygones réguliers. (Dans ce cas, bien sûr, chaque région n'est plus constituée d'une seule face.) Le patron d'assemblage de cette construction (tiré de Stewart [3], p. 199), ainsi que les moitiés *intérieure* et *extérieure* du tore présentées séparément se trouvent à la Figure 6. Les numéros inscrits sur les polygones désignent les couleurs. Un examen de la Figure 6, ou d'une maquette construite selon ces indications, confirme que chacune des couleurs est en fait adjacente à toutes les autres couleurs.

Une autre construction qui présente un intérêt semblable est le tore sur lequel les régions sont non seulement adjacentes, mais aussi congruentes. Chacune des régions y est constituée de quatre triangles qui sont congruents par paires. Pour sa construction,

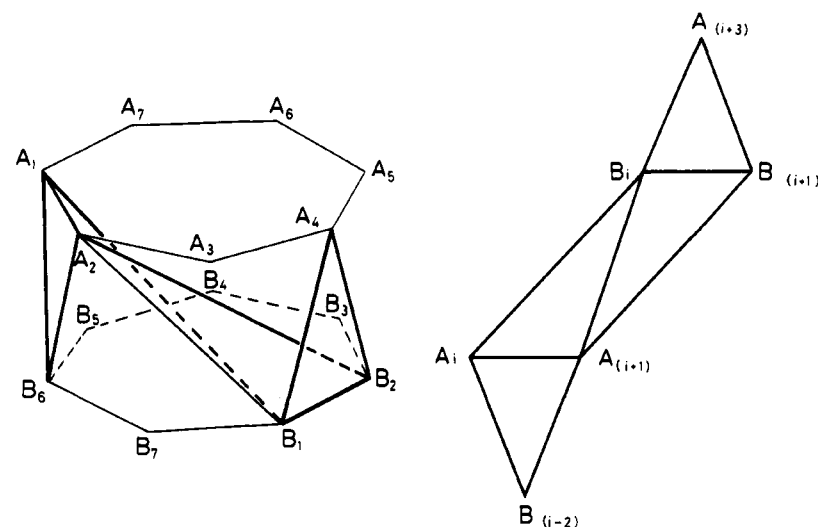


Figure 7 Realization of Heawood's map with toroid constructed of seven regions any of which is congruent and neighbouring with each other. Every region consists of four triangles • Une application du réseau de Heawood sur un tore dont chacune des sept régions est adjacente à toutes les autres et dont toutes les régions sont congruentes. Chaque région est constituée de quatre triangles.

5. Various problems arose in the last century in connection with the colouring of maps, e.g. the four-colour problem. In 1890 it was proved by Heawood that seven colours are sufficient for colouring any map drawn on a torus. At the same time he also showed that seven colours are necessary too, by drawing on the torus a map consisting of seven regions, any two of which were adjacent, so that in order to get the required colouring each region had to be given a different colour. By the polyhedron described here Heawood's seven-colour map can be constructed from seven simple planar hexagons, that is Heawood's toroidal map topologically isomorphic to this toroid.

Heawood's seven-colour map can also be realized with a toroid each face of which is a regular polygon. (In this case, of course, the regions no longer consist of a single face.) The network of this construction (due to Stewart [3], p. 199), together with the separate *interior* and *exterior* halves of the toroid, may be seen in Figure 6. The numbers in the polygons denote the colours. Examination of Figure 6 or of a model prepared on this basis confirms that every colour is in fact adjacent to all of the other colours.

A similarly interesting construction is the toroid in which the regions are not only adjacent, but also congruent. Each such region consists of four triangles which are congruent in pairs. For its construction, let us consider the regular heptagon $A_1A_2...A_7$.

prenons l'heptagone régulier $A_1A_2\dots A_7$, faisons-lui subir une rotation d'un angle $(5/2) \cdot (2\pi/7)$ autour de son centre, et alors déplaçons-le dans la direction perpendiculaire à son plan. De cette façon, nous obtenons l'heptagone régulier $B_1B_2\dots B_7$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, 7$, la figure constituée des triangles $A_iA_{i+1}B_{i-2}$, $A_iB_iA_{i+1}$, $B_iB_{i+1}A_{i+1}$ et $B_iA_{i+3}B_{i+1}$ est coloriée d'une couleur et est considérée comme une région (Figure 7). (Si un indice n'est pas compris entre 1 et 7, 7 lui est soit ajouté, soit soustrait de façon à produire un nombre entre 1 et 7, c.-à-d. que les indices sont pris modulo 7.) Si nous faisons subir à la i^{e} région une rotation d'un angle de $2\pi/7$ autour de l'axe reliant les centres des deux heptagones réguliers, nous obtenons la $(i+1)^{\text{e}}$ région. Ces régions sont donc vraiment congruentes, et ensemble elles forment un toroïde. À l'examen des indices des arêtes qui limitent les régions, il est clair que chacune d'elles est effectivement adjacente à toutes les autres. Par exemple, la i^{e} région est adjacente à la $(i-1)^{\text{e}}$ région sur son arête $\overline{A_iB_i}$, et à la $(i-3)^{\text{e}}$ région sur son arête $\overline{A_iB_{i-2}}$.

Pour construire le polyèdre, il est permis de fixer arbitrairement la distance entre les plans des deux heptagones réguliers ou, par exemple, la longueur des côtés du triangle isocèle $A_iA_{i+1}B_{i-2}$. À partir de là, les autres valeurs peuvent être calculées. Le Tableau 3 fournit les données pour les trois variantes du toroïde, lesquelles diffèrent par leurs longueurs d'arête.

Ce polyèdre est un toroïde régulier de la classe T_1 ; ses faces appartiennent à deux classes de congruence, et ses angles solides à une classe de congruence, c.-à-d. qu'ils sont congruents. Il a $7 \cdot 4 = 28$ faces.

Tableau 3 — Table 3

Le toroïde à sept régions, toutes adjacentes deux à deux

The toroid with seven congruent, pairwise adjacent regions

edge • arête	1 st variant • 1 ^{re} variante		2 nd variant • 2 ^e variante		3 rd variant • 3 ^e variante	
	edge length •	interfacial angle •	edge length •	interfacial angle •	edge length •	interfacial angle •
	longueur de l'arête	angle dièdre	longueur de l'arête	angle dièdre	longueur de l'arête	angle dièdre
$\overline{A_iA_{i+1}}$	6	64°1'	6	51°45'	6	43°21'
$\overline{A_iB_{i-2}}$	6	150°13'	8	152°13'	10	153°1'
$\overline{A_iB_i}$	13.48	51°12'	14.48	65°11'	15.68	74°33'
$\overline{A_{i+1}B_i}$	10.04	332°15'	11.35	325°13'	12.84	320°43'

We rotate it by the angle $(5/2) \cdot (2\pi/7)$ about its centre, and then shift it in the direction perpendicular to its plane. In this way we obtain the regular heptagon $B_1B_2\dots B_7$. For each $i = 1, 2, \dots, 7$, the figure consisting of the triangles $A_iA_{i+1}B_{i-2}$, $A_iB_iA_{i+1}$, $B_iB_{i+1}A_{i+1}$ and $B_iA_{i+3}B_{i+1}$ is coloured one colour and is considered as one region (Figure 7). (If some index does not lie between 1 and 7, 7 is either added to it or subtracted from it so as to yield a number between 1 and 7, i.e. indices are taken modulo 7.) If the i -th region is rotated by the angle $2\pi/7$ around the axis joining the centres of the two regular heptagons, we obtain the $(i+1)$ -th region. These regions are therefore indeed congruent, and together form a toroid. Examining the indices of the edges bordering the regions one can see that each of them is indeed adjacent to all of the others. For example, the neighbour of the i -th region along the edge $\overline{A_iB_i}$ is the $(i+1)$ -th region, and its neighbour along the edge $\overline{A_iB_{i-2}}$ is the $(i-3)$ -th region.

For the construction of the polyhedron, we may arbitrarily fix the distance of the planes of the two regular heptagons or, for example, the sides of the isosceles triangle $A_iA_{i+1}B_{i-2}$. From these, the other data may be calculated. Table 3 provides the data of three variants of the toroid, differing in their edge lengths.

This polyhedron is a regular toroid in class T_1 ; its faces belong to two congruence classes and its solid angles to one congruence class, i.e. they are congruent. It has $7 \cdot 4 = 28$ faces.

Tableau 4 — Table 4

Le toroïde à 24 faces dont les angles solides sont congruents

The toroid with congruent solid angles, having 24 faces

edge • arête	1 st variant • 1 ^{re} variante		2 nd variant • 2 ^e variante		3 rd variant • 3 ^e variante	
	edge length •	interfacial angle •	edge length •	interfacial angle •	edge length •	interfacial angle •
	longueur de l'arête	angle dièdre	longueur de l'arête	angle dièdre	longueur de l'arête	angle dièdre
$\overline{A_iA_{i+1}}$	6	66°50'	6	54°15'	6	45°36'
$\overline{A_iB_{i-2}}$	6	145°13'	8	147°35'	10	148°31'
$\overline{A_iB_i}$	12.68	44°5'	13.74	56°27'	14.99	64°46'
$\overline{A_{i+1}B_i}$	9.92	344°12'	11.24	340°4'	12.74	337°24'

Il est possible d'obtenir un toroïde de la même espèce (c.-à-d. dont les angles solides sont congruents et qui ne comporte que deux types de face), qui appartient à la classe T_1 , et qui compte moins de faces et de sommets, si la construction est faite à partir d'un hexagone régulier au lieu d'un heptagone. Celui-ci ne compte que 12 sommets et 24 faces. Les données numériques pour trois variantes ayant des longueurs d'arête différentes se trouvent au **Tableau 4**. Une comparaison des données des **Tableaux 3 et 4** démontre que ces derniers toroïdes sont beaucoup plus chargés. Il n'est pas possible d'obtenir par cette méthode un toroïde régulier ayant un nombre de faces encore plus petit, puisque, par exemple, avec un pentagone régulier toutes les arêtes $\overline{A_i B_i}$ se croisent en un point, soit le centre de symétrie de la figure.

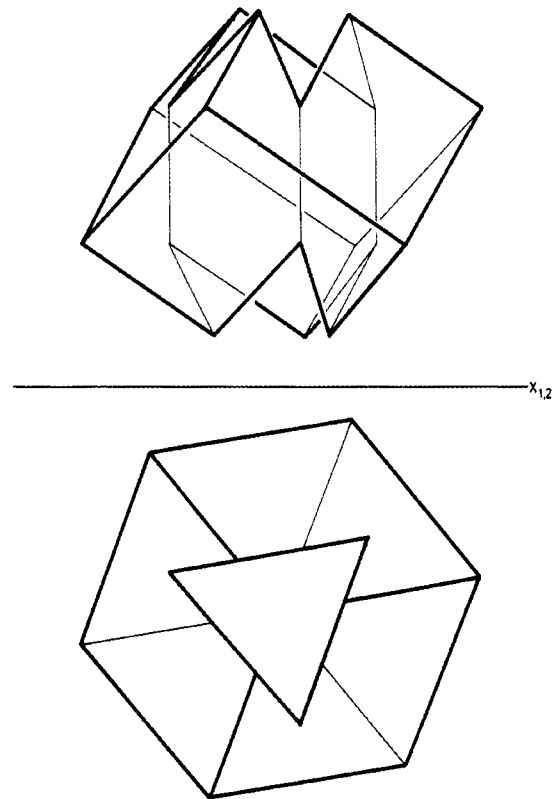


Figure 8 A toroid with nine faces, which are of two kinds concerning their congruency • Un toroïde à neuf faces, lesquelles appartiennent à deux classes de congruence.

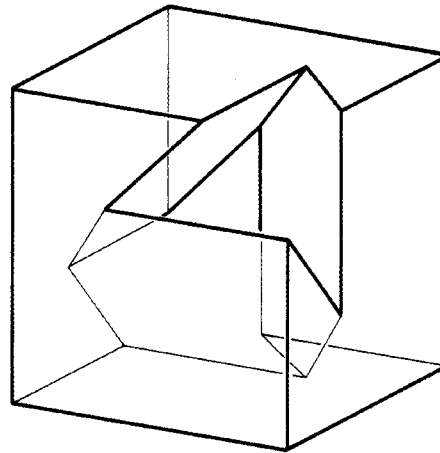


Figure 9 A toroid with nine faces, which are of two kinds concerning their congruency • Un toroïde à neuf faces, lesquelles appartiennent à deux classes de congruence.

A toroid of the same kind (i.e. with congruent solid angles and with two types of faces) in T_1 , having fewer faces and vertices can also be obtained if we set out this construction from a regular hexagon instead of a heptagon. This has 12 vertices and only 24 faces. The numerical data of three variants, with different edge lengths are in **Table 4**. A comparison of the data in **Tables 3 and 4** demonstrates that the latter toroids are much more crowded. A regular toroid with an even smaller number of faces cannot be obtained in this way, because, for instance, for a regular pentagon all of the edges $\overline{A_i B_i}$ meet in one point, the centre of symmetry of the figure.

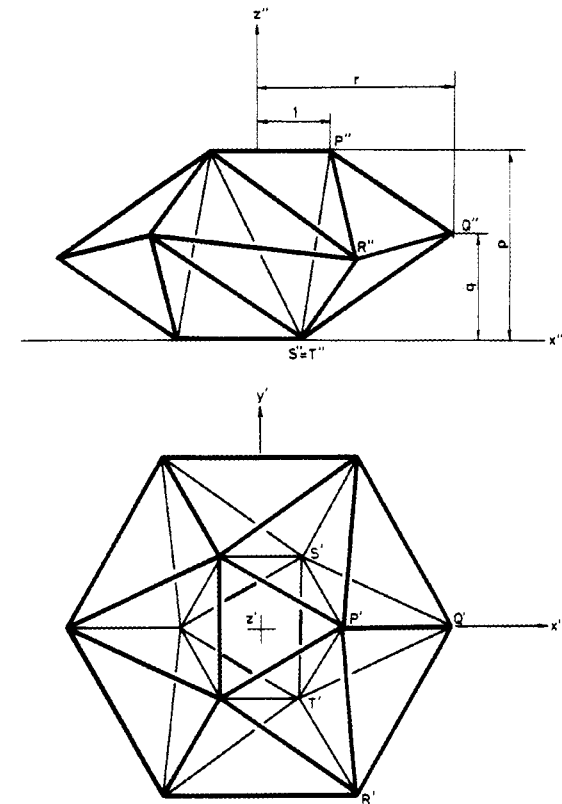


Figure 10 Toroid with 24 faces consisting of only congruent triangles • Un toroïde à 24 faces constitué seulement de triangles congruents.

6. Comme nous l'avons vu, le toroïde de la classe T_3 qui compte le plus petit nombre de faces (Figure 4) a sept faces qui appartiennent à quatre classes de congruence, et ses angles solides appartiennent à sept classes de congruence. Nous allons démontrer qu'il existe un toroïde régulier de la classe T_3 ayant neuf faces dont les faces et les angles solides appartiennent respectivement à deux et trois classes de congruence.

Traçons sur le plan π une projection orthogonale d'un cube telle qu'une des diagonales internes du cube choisie à l'avance soit perpendiculaire au plan. Cette projection est un hexagone régulier. Si nous n'utilisons que les projections de celles des diagonales des faces qui sont parallèles au plan π , et si nous combinons ces six projections en trois paires de sorte que chaque paire soit composée des projections de deux diagonales non coplanaires mais appartenant à des faces adjacentes du cube, nous obtenons trois points d'intersection. Chacun de ces trois points d'intersection est la projection orthogonale d'un segment de droite qui lie les deux diagonales des faces appartenant à une des paires décrites plus tôt, et ces segments de droite sont parallèles à la diagonale interne du cube que nous avons choisie.

Grâce à cette construction, nous pouvons transpercer le cube avec un prisme triangulaire dont les arêtes n'appartenant pas aux faces triangulaires sont parallèles à la diagonale choisie du cube et passent par les points des faces du cube dont les projections sont les trois points d'intersection décrits plus tôt (Figure 8).

La partie *externe* de la surface du toroïde qui en résulte est constituée de six hexagones concaves mutuellement congruents qui sont les parties restantes des faces du cube, alors que sa partie *interne* est constituée de trois hexagones convexes mutuellement congruents produits lors de la pénétration (Figure 9).

7. Quel est le plus petit nombre de faces requis pour construire un toroïde constitué uniquement de faces congruentes? Stewart [3] (p. 250) a construit un toroïde régulier de la classe T_1 constitué de 36 triangles isocèles congruents.

Nous allons démontrer qu'il existe un toroïde ayant un total de 24 faces, qui sont toutes des triangles isocèles congruents.

Pour la construction, nous prenons un triangle régulier, nous lui faisons subir d'abord une rotation de 60° autour de son centre, puis une translation sur une distance p (à être déterminée plus tard) dans la direction perpendiculaire à son plan. Les six points qui en résultent définissent six triangles isocèles de base a et de côté b . Ils constituent la partie *intérieure* du toroïde. La partie *extérieure* de la surface du toroïde sera constituée de triangles isocèles congruents avec les précédents. Pour cela, il faut six nouveaux sommets tels qu'un quelconque de ces sommets soit à une distance b des nouveaux sommets qui lui sont adjacents, et à une distance a ou b des sommets originaux qui lui sont adjacents. Ces six sommets sont disposés de sorte que trois d'entre eux soient à une distance q du plan du triangle régulier du bas avec lequel nous avons débuté la construction, et que les trois autres, intercalés entre les premiers, soient à une distance q du plan du triangle régulier du haut. La Figure 10 présente une double projection plane de la construction. La projection

6. As we have seen, the toroid with the lowest number of faces in class T_3 (Figure 4) has seven faces which belong to four congruence classes, and its solid angles belong to seven congruence classes. We shall prove that there exists in class T_3 a regular toroid with nine faces such that its faces and solid angles belong to two, respectively three, congruence classes.

Let us project a cube perpendicularly to a plane π perpendicular to one of its internal diagonals selected in advance. The resulting projection is a regular hexagon, therefore the projections of any two skew facial diagonals parallel to π , that are incident with adjacent faces of the cube, trisect each other. This means that the line segments joining the corresponding points of trisection of the facial diagonals in question are parallel to the selected internal diagonal.

Utilizing this we can pierce the cube with a triangular prism, whose edges are parallel to the diagonal of the cube and pass through the points of trisection of the pairs of skew facial diagonals of the cube (Figure 8).

The *external* part of the resulting toroid surface consists of the six mutually congruent concave hexagons remaining from the faces of the cube, while its *internal* part is formed by the three, mutually congruent convex hexagons arising during the penetration (Figure 9).

7. What is the smallest number of faces needed to construct a toroid consisting purely of congruent faces? Stewart [3] (p. 250) constructed a regular toroid in class T_1 consisting of 36 congruent isosceles triangles.

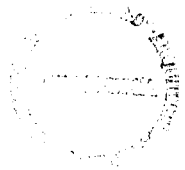
We shall show that there exist a toroid with a total of 24 faces that are congruent isosceles triangles.

For the construction we take a regular triangle, rotate it by 60° about its centre, and then shift it by a distance p (to be determined later) in the direction perpendicular to its plane. The resulting six points define six isosceles triangles with base a and side b . These form the *interior* part of the toroid. The *exterior* part of the toroid surface will be constructed from isosceles triangles congruent with the previous ones. For this, six new vertices must be taken so that their distance from each other is b and from the previous vertices a or b , respectively. The six vertices are situated so that three of them are at a distance q from the plane of the lower regular triangle we started with, while the three between them are at a distance q from the plane of the upper regular triangle. Figure 10 presents a two-image-plane picture of the construction. The perpendicular projection of the outer six points to the first image plane is a regular hexagon. Let r be the radius of its circumscribed circle, while the radius of the circumscribed circle of the regular triangle we started with is the

orthogonale des six points périphériques sur le premier plan de projection est un hexagone régulier. Soit r , le rayon du cercle circonscrit de cet hexagone, et soit 1, le rayon du cercle circonscrit du triangle avec lequel nous avons débuté la construction. Avec ces variables, il est possible d'exprimer les coordonnées rectangulaires des points P , Q , R , S et T de la Figure 10 comme suit:

$$P(1, 0, p), \quad Q(r, 0, q), \quad R\left(\frac{r}{2}, \frac{-r\sqrt{3}}{2}, p-q\right), \quad S\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \text{ et } T\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

Notre tâche consiste à choisir des valeurs telles que les conditions $\overline{ST} = \overline{PQ} = a$ et $\overline{SP} = \overline{PR} = \overline{QR} = b$ soient satisfaites. Cinq équations peuvent être extraites des coordonnées des points:



$$a^2 = 3$$

$$a^2 = (r-1)^2 + (q-p)^2$$

$$b^2 = 1 + p^2$$

$$b^2 = \left(\frac{r}{2} - 1\right)^2 + \frac{3}{4}r^2 + q^2$$

$$b^2 = r^2 + (p-2q)^2$$

Les racines positives de ce système d'équations sont:

$$p = \frac{3+\sqrt{2}}{2}, \quad q = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad r = \sqrt{2}, \quad a = \sqrt{3}, \quad b = \frac{\sqrt{15+6\sqrt{2}}}{2}$$

Il s'ensuit que le seul paramètre nécessaire pour déterminer le toroïde est le rapport

$$b : a = \sqrt{5+2\sqrt{2}} : 2 = 2,798 : 2$$

Il est à noter que ce toroïde n'est pas régulier, puisque six de ses sommets ont cinq arêtes adjacentes, alors que les six autres ont sept arêtes adjacentes. Les six angles solides de chacun des types sont congruents.

À notre connaissance, il n'existe pas de toroïde ayant moins de 24 faces congruentes.

Finalement, il faut souligner qu'à l'exception des polyèdres des Figures 3, 6 et 10, tous les toroïdes mentionnés comportent une variante dextre et une senestre; bien qu'elles soient congruentes, pour transformer l'une en l'autre il faut passer par une réflexion par un plan.

unity. With these variables the rectangular coordinates of the points P , Q , R , S , T in Figure 10 can be expressed as follows:

$$P(1, 0, p), \quad Q(r, 0, q), \quad R\left(\frac{r}{2}, \frac{-r\sqrt{3}}{2}, p-q\right), \quad S\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad T\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

Our task is to select the data so that the conditions $\overline{ST} = \overline{PQ} = a$ and $\overline{SP} = \overline{PR} = \overline{QR} = b$ be satisfied. Five equations can be set up from the coordinates of the points:

$$a^2 = 3$$

$$a^2 = (r-1)^2 + (q-p)^2$$

$$b^2 = 1 + p^2$$

$$b^2 = \left(\frac{r}{2} - 1\right)^2 + \frac{3}{4}r^2 + q^2$$

$$b^2 = r^2 + (p-2q)^2$$

The positive roots of this system of equations are:

$$p = \frac{3+\sqrt{2}}{2}, \quad q = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad r = \sqrt{2}, \quad a = \sqrt{3}, \quad b = \frac{\sqrt{15+6\sqrt{2}}}{2}$$

From this, the single parameter determining the toroid is the ratio

$$b : a = \sqrt{5+2\sqrt{2}} : 2 = 2,798 : 2$$

It must be noted that this toroid is not regular, since five edges meet at six of its vertices, and seven edges meet at the other six. The corresponding six solid angles of either type are congruent.

We are not aware of the existence of a toroid with less than 24 congruent faces.

Finally, it should be mentioned that, with the exceptions of the polyhedra in Figures 3, 6 and 10, all of the toroids mentioned above have a dextro and a laevo variant; although these are congruent, they can be transformed into each other only by reflection in a plane.

Références — References

Adresse de l'auteur:

Dr Szilassi Lajos
Szeged
Bite Pál u. 2/B
H-6723
Hongrie

- [1] Á. Császár, "A Polyhedron without Diagonals", *Acta Sci. Math. Universitatis Szegediensis* 13, 1949-50, pp. 140-142.
- [2] M. Gardner, "On the Remarkable Császár Polyhedron and its Applications in Problem Solving", *Scientific American* 1975/5, pp. 102-106.
- [3] B.M. Stewart, *Adventures among the Toroids*, Okemos, Michigan, 1980, revised 2nd edition.
- [4] L. Szilassi, "Extremális Tulajdonságú Toroidok", *Acta Acad. Paed. Szeged*, 1983, pp. 43-56, (Hungarian—hongrois).

Address of the author:

Dr. Szilassi Lajos
Szeged
Bite Pál u. 2/B
H-6723
Hungary