５個と６個の輪だけで編むビーズ編みの構造について

第１部【準備】§１　ビーズ編みについて

・ルール　⊙　使用するビーズの大きさは同じ。穴は中心を通るひとつ。編む糸をテグスと呼ぶ。

⊙　ビーズ編みは「エイトノット」編み。２つ以上のビーズに平行してテグスは通らない。

⊙　輪にするビーズの個数は，５個と６個のみ。これを<u>五個角形</u>，<u>六個角形</u>と呼ぶ。

・ビーズ編みと頂点と辺と面の関係

⊙　頂点は，３つのビーズの間のＹ字の交点。

⊙　辺は，ビーズそのもの。

⊙　面は，ビーズで囲まれた五個角形と六個角形。

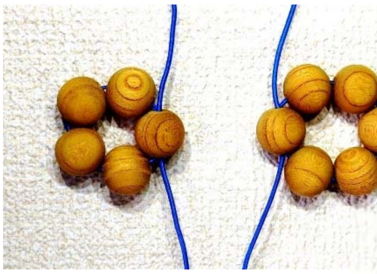


図０

・用語「五個角形」などは，ビーズの中心が必ずしも同一平面内である事を

要しない事を意味していて，一般の幾何図形である多角形とは異なる概念である。

§２　ビーズ編みが全体として球面状（穴のない構造）の場合について

・五個角形の個数を p，六個角形の個数を h とする。頂点，辺，面を v, e, f とする。

$$v-e+f=2 \ \text{and} \ \begin{cases} v=(5p+6h)/3 \\ e=(5p+6h)/2 \\ f=p+h \end{cases} \Rightarrow p=12$$

五個角形の個数は１２である。

§３　古典的なビーズ編みの紹介（３０球，９０球，１２０球の例）

図１　P12H0

図２　P12H20

図３　P12H30

図１は，$f=12+0=12$，$v=(5\times12+6\times0)/3=20$，$e=(5\times12+6\times0)/2=30$

図２は，$f=12+20=32$，$v=(5\times12+6\times20)/3=60$，$e=(5\times12+6\times20)/2=90$

図３は，$f=12+30=42$，$v=(5\times12+6\times30)/3=80$，$e=(5\times12+6\times30)/2=120$

図１をP12H0(Type)と呼び，他の例も同様とする。(P:Pentagon，H:Hexagon，以下 Type：略)

これらの例では六個角形の個数hは$h=0,20,30$であるのだが，実際$h=3,7,19,\cdots,1000,\cdots$などのビーズ編みは可能なのだろうか。この問に対し考察する。

（本題に入る前の注意）ビーズ編みが存在すれば，球面上の五角形と六角形のみのグラフが存在するが，逆は必ずしも成り立たない事に注意する。

第２部【本題１】§４　「任意の非負の整数hに対しビーズ編みP12Hhは存在するか。あるいは，hの条件」

主張　$\boxed{\text{非負の整数}h\neq 1\text{に対してビーズ編みP12H}h\text{は存在する。}}$

$h=0$に対しては，古典的なビーズ編みの紹介で最初に示しているので，存在している。

以下，$h\geq 2$に対して，P12Hhの無限列を考え存在を証明する。

§５　「Cap と Connector について」

Cap とは２個ずつ組になったビーズが全体として 12 個の輪を持ち，その輪に繋がったP6Hh構造のビーズ編みのことである。使用する４種の Cap を示す。

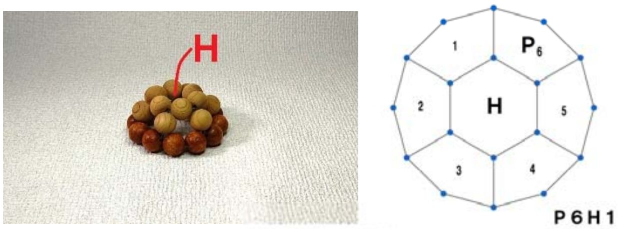


図４　P6H1

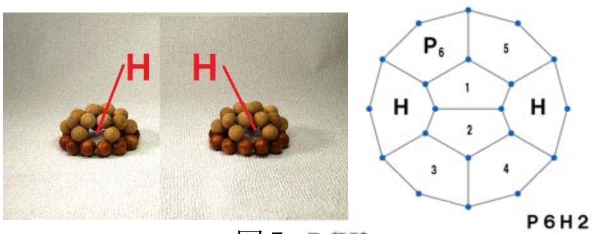


図５　P6H2

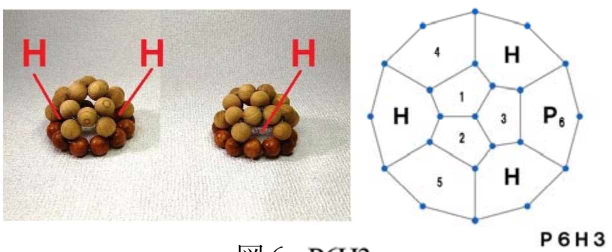


図６　P6H3

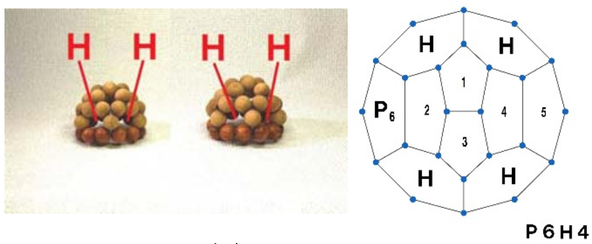


図７　P6H4

Connector とは Cap と同様にビーズが全体として 12 個となる輪を両端に持ち間に H$h\left(h=6,12,18,\cdots\right)$ 構造を持ったビーズ編みのことである。

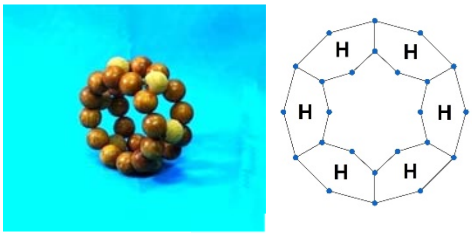


図 8　H6


図 9　H6 と H12

図 8 は H6 1 個の場合。図 9 は H6 とそれが 2 個繋がった H12 である。無論 3 個，4 個･･･となる。

§ 6　P12Hh の構成法の具体例（2 つの例 P12H5，P12H11）


図 10　P12H5 と P6H2, P6H3


図 11　P12H11 と P6H2, H6, P6H3

図 10 では，12 個の濃い色のビーズを同一視し 2 つの Cap P6H2, P12H5 を繋ぐことで，P12H5 を構成できる。さらに図 11 では，Cap P6H2 と Connector H6 そして Cap P12H5 を繋いで P12H11 を構成できる。

Connector をさらに増やせば，順に 6 個角形の個数を順に 6 ずつ増加されられる。したがって，この 2 つの Cap と Connector を k 個使うことで，P12Hh $\left(h=5+6k,\ k=0,1,2,3,\cdots\right)$ を構成できる。

このような構成方法を用いて，次の 6 系列 P12Hh_0 $\left(h_0=2,3,4,5,6,7\right)$ を構成できる。

◎P6H1+P6H1=P12H2

◎P6H1+P6H2=P12H3

◎P6H1+P6H3=P12H4

◎P6H2+P6H3=P12H5

◎P6H3+P6H3=P12H6

◎P6H3+P6H4=P12H7


図 12　P12H2 から P6H7

これらの６系列とConnectorを考え合わせれば６個角形を６ずつ増加させられるので，２つのCapとCapの間にConnectorを$k\left(=0,1,2,\cdots\right)$個入れる事でP12H$h$の$h$を$6k$個ずつ増加させることが出来る。つまり，P12H$h$ $\left(h=h_0+6k,\ h_0=2,3,4,5,6,7,\ k=0,1,2,3,\cdots\right)$が構成できるから，２以上の$h$についてP12H$h$が構成できる。したがって，非負の整数$h\neq 1$に対してビーズ編みP12H$h$は存在する。

第３部【本題２】§５ P12H1の非存在証明

本題に入る前に，グラフを作る過程で使用する性質を幾つかまとめておく。

［補助定理］五角形のみを作る条件の下で，次の様なグラフにおいて辺を結ぶことが可能な方法のまとめ。

まず，図４の図Ａから図Ｄの実線の横線の意味について確認する。横線の実線下部は５角形または６角形の内部を意味している。

例えば，図Ａにおいて，点▲1を実線の上側に描いているが，実線下部は５角形または６角形の内部となることから，点●1と点▲1を結ぶ線分は実線下部には描けない。図Ｂ，Ｃ，Ｄについても同様である。

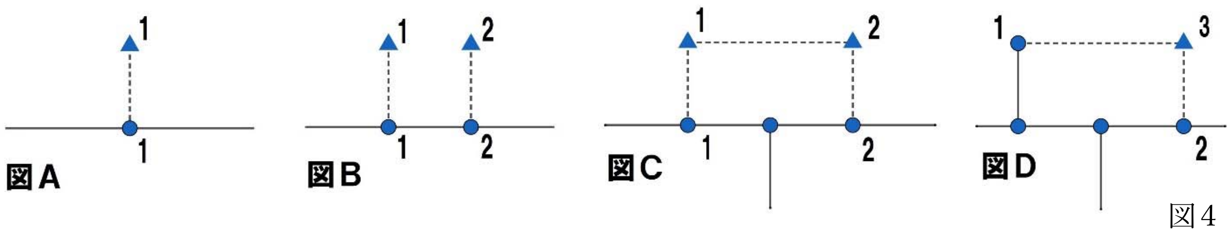


図４

図４の図Ａから図Ｄまで４つの場合について考える。点▲と点線で表されたモノは，最初存在していない。

図Ａの点●1は，辺を２本持っているので３本目の辺は，別の点▲1と結ばれる。

図Ｂの場合も，図Ａと同様に考えると，点●1, 2からそれぞれ点▲1, 2と結ばれる。

図Ｃの場合は，図Ｂと同じく点●と点▲の同番号を結ぶ。そして，全体として五角形を形作ることから，点▲1と点▲2を辺で結び，五角形をひとつ作るしかない。

図Ｄの場合は，２点●1, 2と新しい点▲3をそれぞれ結び，五角形をひとつ作るしかない。

［定理］球面上のグラフでは１２個の五角形と１個の六角形からなるグラフは存在しない。

［証明］１２個の五角形と１個の六角形からなる球面上のグラフがあると仮定し，このグラフを１個の六角形から始め，条件に反しない様にして，順に面や点，辺を増やしていくことで構成する。

$$f=12+1=13,\quad v=\left(5\times12+6\times1\right)/3=22,\quad e=\left(5\times12+6\times1\right)/2=33$$

つまり，面１３，頂点３２，辺３３となっている。‥‥‥（※）

六角形１つ以外はすべて五角形であることから，六角形の周りには五角形６個が配置される。(図５)

（補足）図５について, 球面上のグラフなので平面グラフのように内側とか外側の区別は無い事に注意。

６つの点◆1, 3, 5, 7, 9, 11 からは３本目の辺が必要である。６つの点●2, 4, 6, 8, 10, 12 にはすでに３本の辺があるから, これ以上辺を増やせない。

図５の◆, ●の点 12, 1, 2, 3, 4 のグラフから補助定理を使い，図６のような，◆, ●, ▲の点 1, 2, 3, 14, 13 の五角形を完成させるほかない。

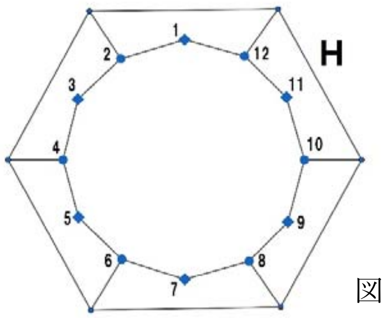


図５

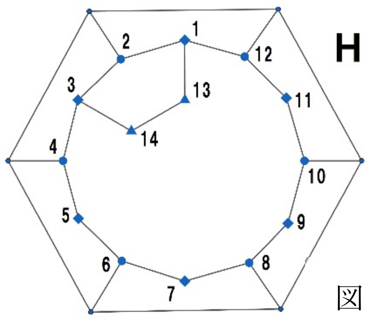


図６

図６の▲, ◆, ●の点 14, 3, 4, 5, 6 のグラフから同様に，図７のような，◆, ●, ▲の点 3, 4, 5, 15, 14 の五角形を完成させるほかない。

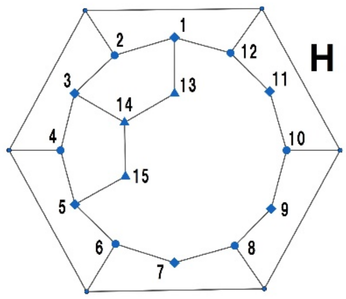


図７

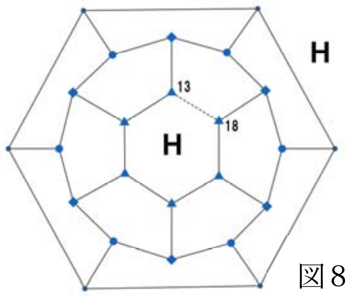


図８

この考えを続けると, 図８の点線部分の辺（点▲13, 18）を除いたグラフができる。最後に，この点線で表示された辺を結び，１２個の五角形を使ってグラフが完成した。

しかし，この図８は２個の六角形が存在しているので, 元々六角形１個である事に矛盾する。 □

以上すべてをまとめ，五個角形と六個角形だけの穴のないビーズ編みは, ６個角形の個数について，１個だけは無理であるが, 他の個数はすべて編むことができる。

【後書き】§６　感想

例えば P12H0 は１種類なのは明らかである。また P12H2 は１種類と思うが，本当にそうだろうか。

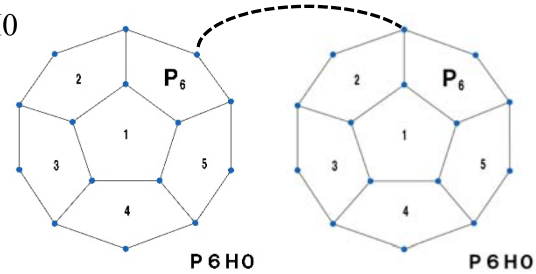
例えば P12H6 は数種類知っているが他にまだあるのか。さらに他の P12Hh の形は何種類あるだろう。

P12Hh のすべての形を調べ上げられるだろうか。

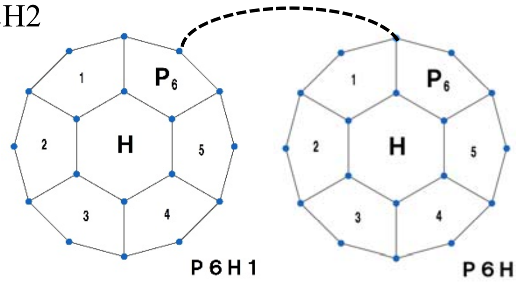
―― 堀部和経　2024/12/23 ――

◎P12Hh のグラフ$\left(h=0,2,3,4,5,6,7\right)$

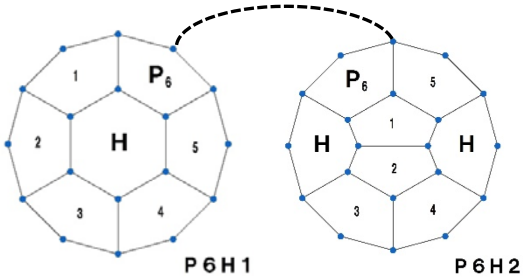
・P12H0



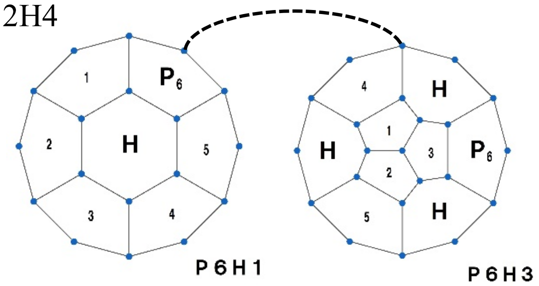
・P12H2



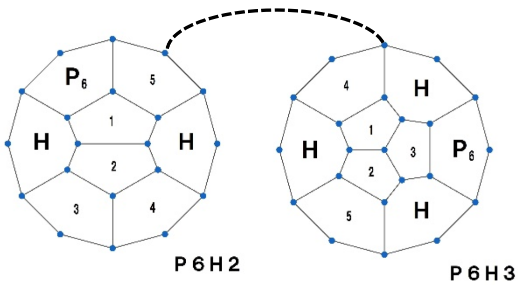
・P12H3



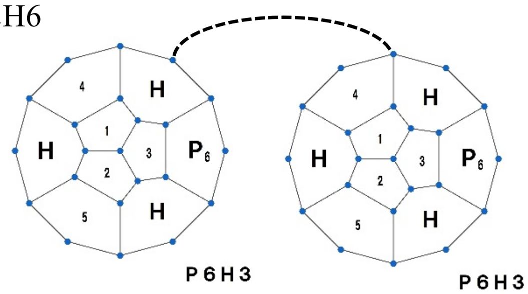
・P12H4



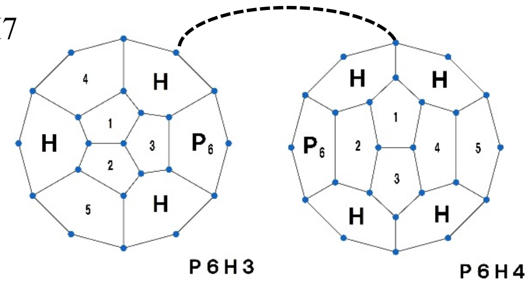
・P12H5



・P12H6



・P12H7



◎P12H$h\left(h\geq 8\right)$ のグラフについて

P12H2 から P12H7 で使用した２つの Cap の間に P0H6 のコネクターを間に入れることで完成する。

・P12H8 の例