正五胞体の紹介　[高校生に向けて]

＊＊＊点・線分・正三角形・正四面体・正五胞体＊＊＊

§1　正単体

点を　**0次元正単体**，線分を　**1次元正単体**，正三角形を**2次元正単体**，正四面体を**3次元正単体**という．

一般に，n次元の図形で，その境界が$n+1$個の$n-1$次元正単体から成るものを　**n次元正単体**という．

以下，**4次元正単体**（正五胞体と呼ばれている）を紹介するために，その図形を構成する点の座標の計算を詳細に説明する．

§2　点から線分へ

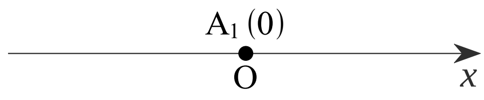


図 1

まず点$A_1(0)$を考える．点は0次元正単体である．

新たにx軸の正の部分に，$A_1B_1=1$となる点B_1をとる．（線分の長さ1をh_1で表す.）

そのx座標は1であるから$B_1(1)$．このとき線分A_1B_1は，1次元正単体となっている．

§3　正三角形

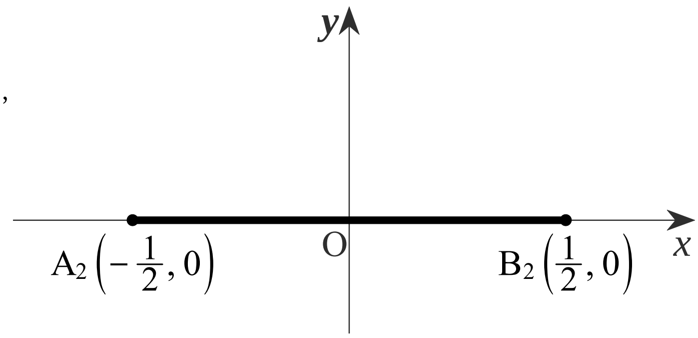


図 2

線分A_1B_1の重心（中点）を原点にするため，

x軸の負の方向に$\frac{1}{2}$だけ平行移動したのち，

y座標（値は$y=0$）を追加すると，

$$A_2\left(-\frac{1}{2},0\right),B_2\left(\frac{1}{2},0\right).$$

新たに，y軸の正の部分に$B_2C_2=1$となる点C_2をとると，そのy座標h_2は，

$$h_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって$C_2\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$となる．このとき$A_2C_2=1$であり，元々$A_2B_2=1$であるから三角形

$A_2B_2C_2$は正三角形，つまり2次元正単体である．

三角形$A_2B_2C_2$の重心は，

$$\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)+\left(\frac{1}{2},0\right)+\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

§ 4　正四面体

正三角形$A_2B_2C_2$の重心を原点にするため，y軸の負の方向に$\frac{\sqrt{3}}{6}$だけ平行移動したのち，z座標（値は$z=0$）を追加すると，

$$A_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right),B_3\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right),C_3\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right).$$

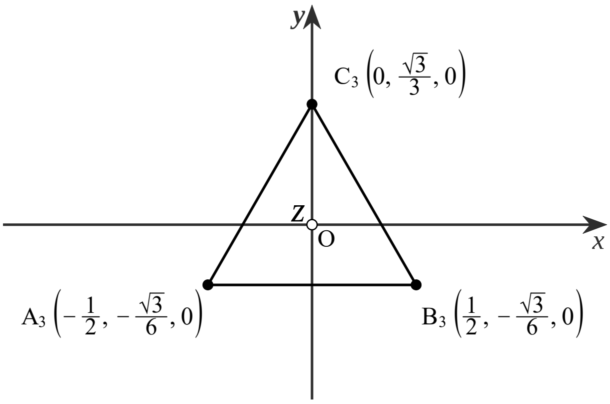


図３

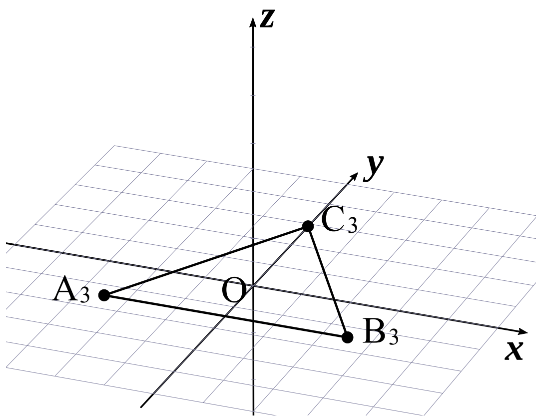


図４

新たに，z軸の正の部分に$C_3D_3=1$となる点D_3をとると，そのz座標h_3は，

$$h_3=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

よって$D_3\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$となる．このとき$A_3D_3=B_3D_3=1$となっている．

元々$A_3B_3=B_3C_3=C_3A_3=1$である3点A_3,B_3,C_3を平行移動した点とD_3を合わせた4点A_3,B_3,C_3,D_3からなる図形の辺長はすべて1である．つまり四面体$A_3B_3C_3D_3$は正四面体，つまり3次元正単体である．

線分の中点や正三角形の重心を求める方法と同様に，正四面体$A_3B_3C_3D_3$の重心は，

$$\frac{1}{4}\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)+\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)+\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)+\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}=\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{12}\right).$$

§ 5　正五胞体

正四面体$A_3B_3C_3D_3$の重心を原点にするため，z軸の負の方向に$\frac{\sqrt{6}}{12}$だけ平行移動したのち，u座標（値は$u=0$）を追加すると，

$$A_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{12},0\right),\ B_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{12},0\right),C_4\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{12},0\right),$$

$D_4\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{4},0\right)$.

x座標・y座標・z座標に続く第4の座標をu座標と呼んでいる．

また,図５の中に点線の矢印でu軸を描いてあるが，実際はどのような方向なのか，三次元の中で暮らしている我々には，考えられない”方向” であろう．

u軸については,どちらに向いているか分からないが，第４の座標軸をイメージして欲しい．

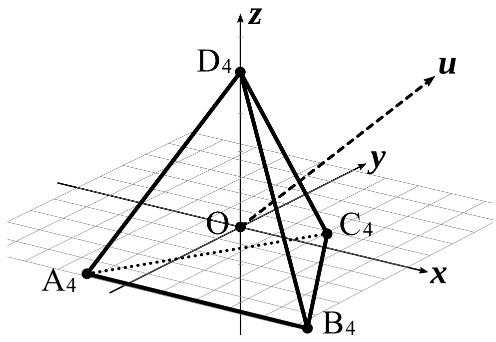


図５

新たに，u軸の正の部分に$D_4E_4=1$となる点E_4をとると，そのu座標h_4は，

$$h_4=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

よって$E_4\left(0,0,0,\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)$となる．このとき$A_4E_4=B_4E_4=C_4E_4=1$となっている．

そして$A_4B_4=A_4C_4=A_4D_4=B_4C_4=B_4D_4=C_4D_4=1$であった4点$A_4,B_4,C_4,D_4$を平行移動した点と$E_4$を合わせた5点$A_4,B_4,C_4,D_4,E_4$からなる図形の辺長はすべて1である．この5点からなる図形を正五胞体という．

§６　n次元正単体とその影

ここから，各次元の正単体の理解を深めるため，２つの手法を使って理解を深める．

まず§6では，正単体（線分・正三角形・正四面体・正五胞体）をそれぞれひとつ低い次元へ射影した図形（いわゆる「影」）を考える．

線分をx軸方向から見た図形を考える．線分も下図の様に1点に見える．これは，元々点2個の影である．（図６）

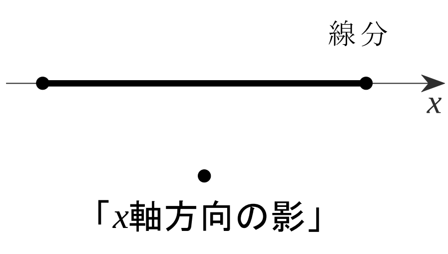


図６

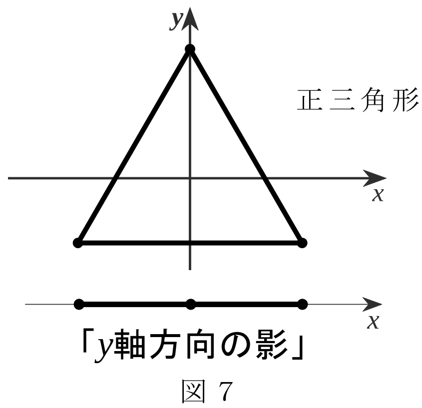


図７

正三角形をy軸方向から見た図形を考える．正三角形も3点が並んだ線分に見える．これは，左端と中央・中央と右端・左端と右端を結んだ3本の線分と見ることができる．そして

これらは，元々同じ長さの線分3本の影である．（図７）

正四面体を z 軸方向から見た図形を考える．正四面体も三角形状に並んだ3個の点の中に4番目の点が見え，それら4点がそれぞれ結ばれた線分が見える．この図形は，外側に正三角形があり，中には鈍角二等辺三角形が3個見える．しかしこれら4個の三角形は，上の図をみれば明らかなように，元々は正三角形4個の影である．（図８）

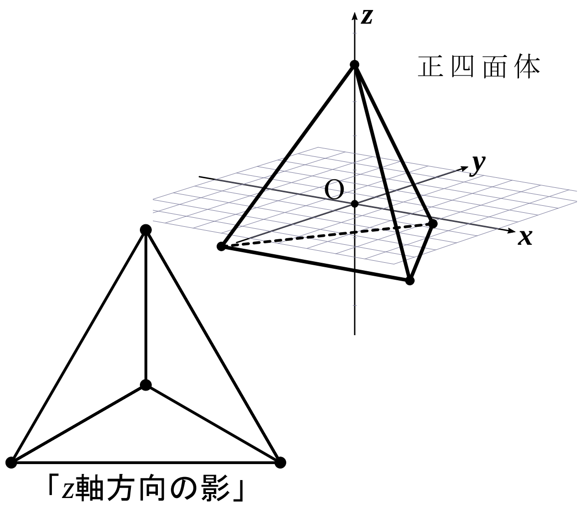


図８

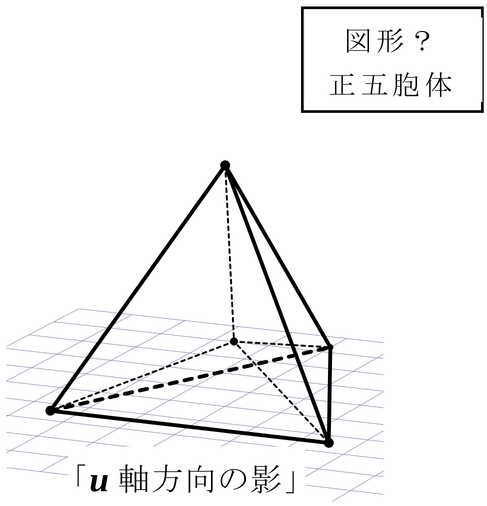


図９

正五胞体の図形は私達には見えないが，u 軸方向から見た図形を考える．その図形は3次元の図形で正四面体（三角錐）とその重心に5番目の点が見え，それらをすべて結んだ線分が見える．外側には,大きな正四面体が見え，その中には,高さの低い正三角錐が4個見えるはずである．これら5個の三角錐は,元々は正四面体5個の影である．（図９）

図９の補足をすると，正五胞体は4次元の図形なので,その影は3次元の立体（図形）である．それを紙面に表すために三次元の立体（図形）を平面に印刷した「見取り図」なっている．

§７　n 次元正単体とその展開図

§６では，正単体とその影を考える事で，正単体のイメージを深めた．この§７では，正単体（正三角形・正四面体・正五胞体）の展開図を考察して，正単体のイメージをさらに膨らませる．

（§７−1）

初めに，正三角形 ABC の展開図を考える．

回転の計算を簡単にするため，点 A が原点に重なるように平行移動する．（図１０）

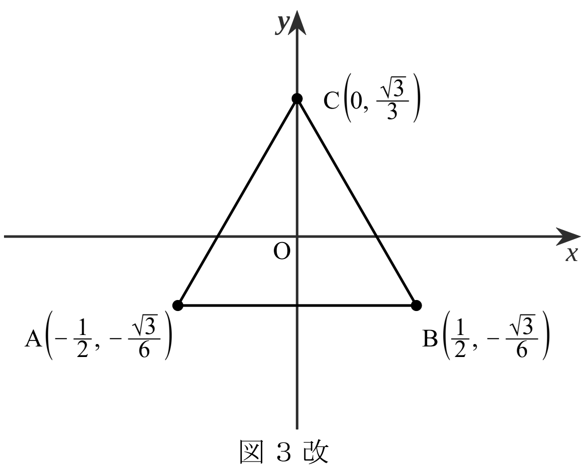


図３改

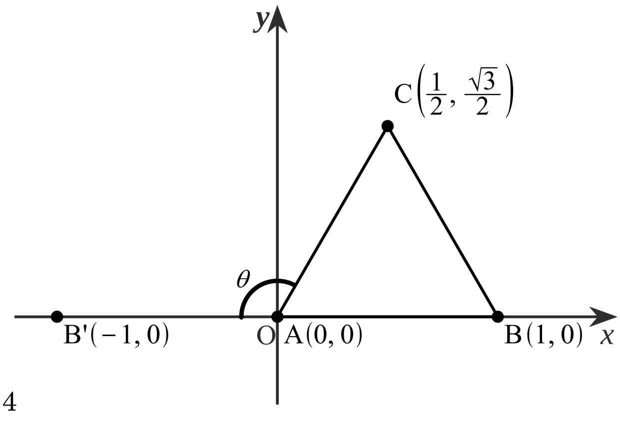


図１０

原点を固定し，$x-y$平面を角θだけ回転する行列$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$を利用する．

正三角形 ABC の点 A を原点に平行移動し，点 B の原点に関する対称点は，$\mathrm{B}'(-1,\ 0)$であるので，点 C が点B'に回転移動する条件の下で$\cos\theta, \sin\theta$を求める．

$$\begin{pmatrix}-1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases}-1=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \cdots ① \\ 0=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \cdots ②\end{cases}$$

②より，$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$なので，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$を得る．

図を見れば明らかに$\theta=\frac{2}{3}\pi$なので，この計算するまでもないのだが・・・．

同様に，点Bを中心に点Cを右側に回転すれば，次の図の様になる．

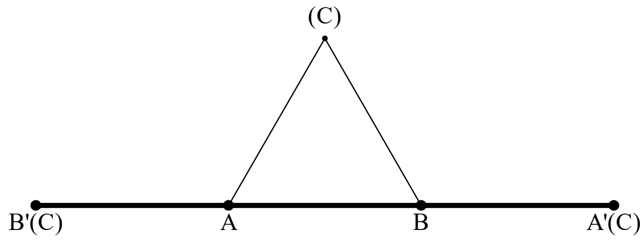


図１１

(§ 7−2)

次に，正四面体 ABCD の展開図を考える．

回転の計算を簡単にするため，点 A が原点に重なるように平行移動する．（図１２）

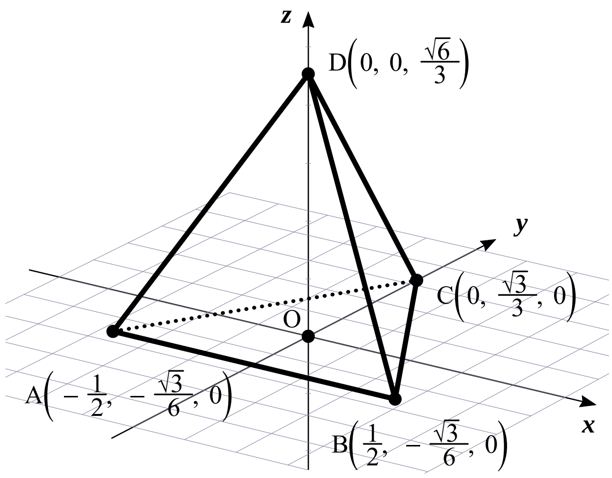


図５改

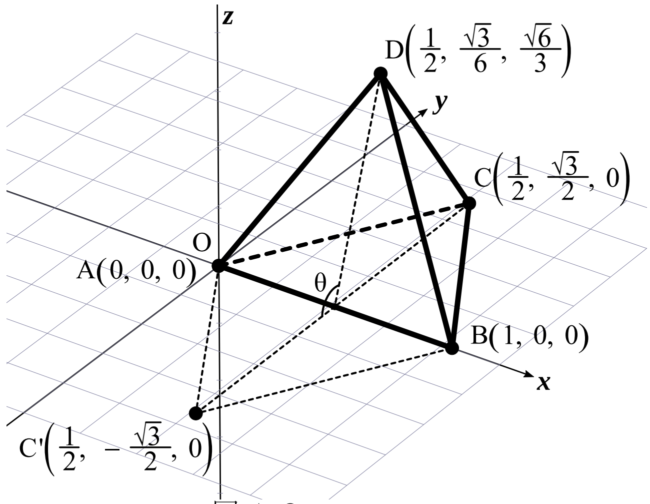


図１２

x軸を固定し，$y-z$平面を角θだけ回転する行列$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$を利用する．

点 C の直線 AB（x軸）に関する対称点は$\mathrm{C}'=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$であるので，点 D が点$\mathrm{C}'$に回転移動する条件の下で$\cos\theta, \sin\theta$を求める．

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta \cdots ① \\ 0 = \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta \cdots ② \end{cases}$$

②より，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta$ なので，

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ を得る．

点 B の直線 CA に関する対称点 B' や点 A' についても同様であるから，正四面体の展開図は次の様である．

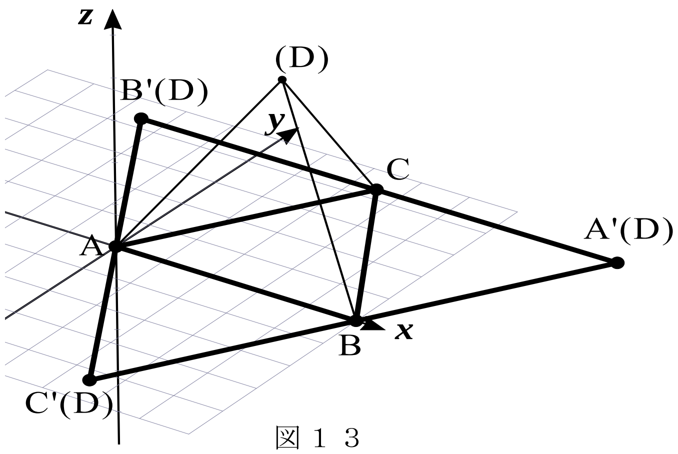


図１３

(§ 7−3)

最後に，正五胞体 ABCDE の展開図を考える．
正五胞体は４次元の図形であった．４次元空間の回転移動は，２次元を固定し他の２次元での回転を考える．
今までの手順と同様に，回転の計算を簡単にするため，点 A が原点に重なるように平行移動する．（図１４・図１５）

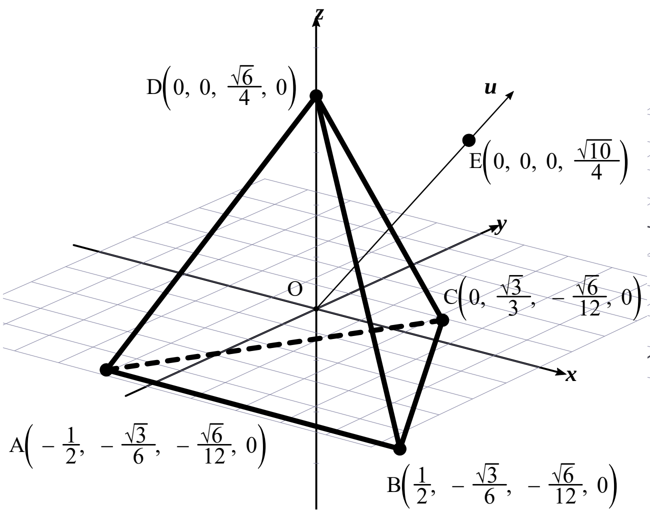


図１４

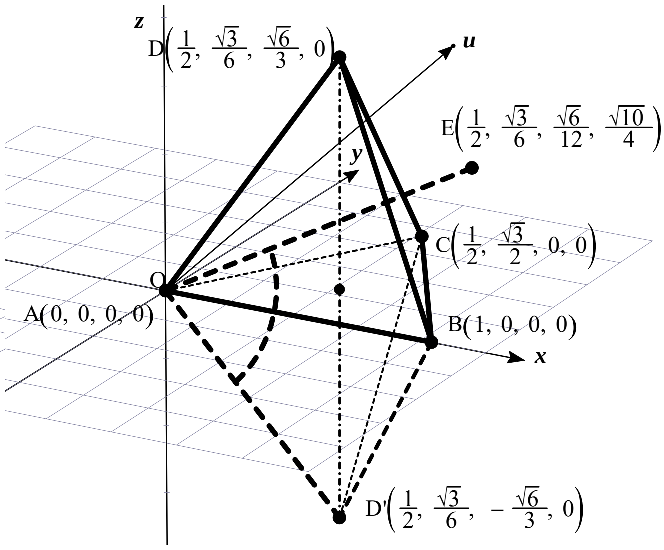


図１５

$x-y$ 平面を固定し，$z-u$ 平面を角 θ だけ回転する行列 $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を利用する．

正五胞体 ABCDE の点 A を原点に平行移動し，点 D の平面 ABC（$x-y$平面）に関する対称点は$D'\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$である．

点 E が点D'に回転移動する条件の下で$\cos\theta, \sin\theta$を求める．

（注意）図１５において，角 $\theta=\angle$EOD'である．

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{12}\\ \frac{\sqrt{10}}{4}\end{pmatrix}$$

より
$$\begin{cases}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cos\theta-\frac{\sqrt{10}}{4}\sin\theta \cdots ①\\ 0=\frac{\sqrt{6}}{12}\sin\theta+\frac{\sqrt{10}}{4}\sin\theta \cdots ②\end{cases}$$

②より，$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\theta$なので，

$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\theta=-\frac{1}{4}$を得る．

同様に，点 E が回転移動で点 A’，B’，C’に一致する条件を考え，正五胞体の展開図は，次の様な図形になる．

これは，３次元空間の中では，正四面体の４つの面に合同な正四面体を貼り合わせた図形となっている．

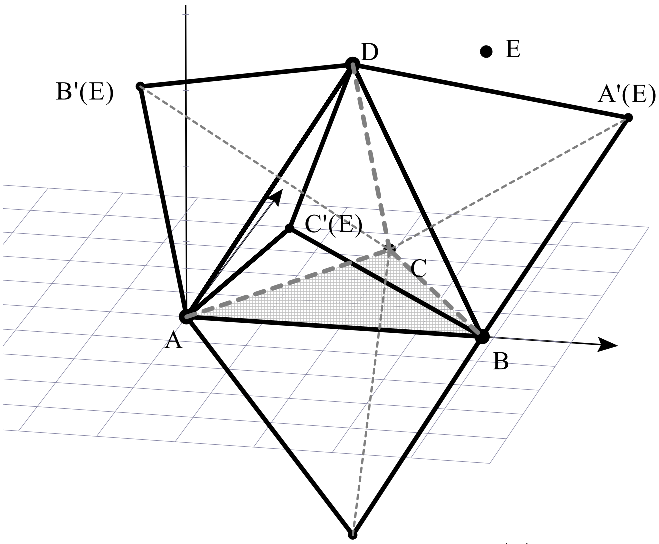
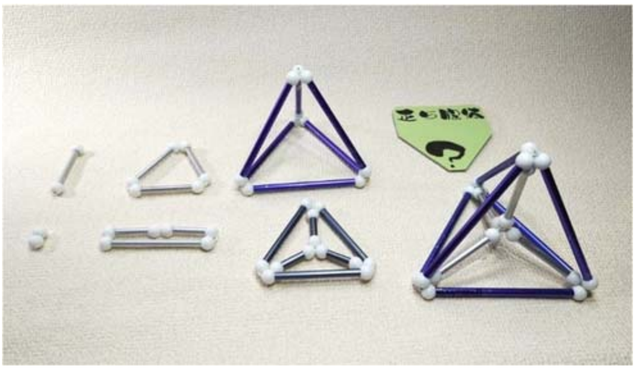


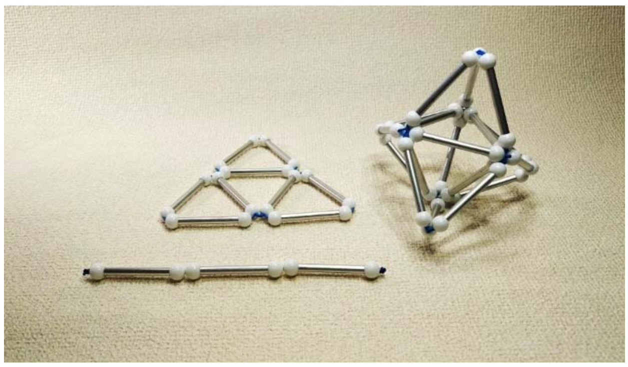
図１６

§８　補足

§７で求めた，３つの$\cos\theta$の値は順に，$\cos\theta=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}$となっている．この値にも秘密がありそうです．一度考えて見てはどうだろうか？？？



§７の模型



§８の模型

堀部和経　　2024-03-05