

5 個と 6 個の輪だけで編むビーズ編みの構造について

第 1 部【準備】 § 1 ビーズ編みについて

- ・ルール
 - ⊙ 使用するビーズの大きさは同じ。穴は中心を通るひとつ。編む糸をテグスと呼ぶ。
 - ⊙ ビーズ編みは「エイトノット」編み。2 つ以上のビーズに平行してテグスは通らない。
 - ⊙ 輪にするビーズの個数は、5 個と 6 個のみ。これを五個角形、六個角形と呼ぶ。

・ビーズ編みと頂点と辺と面の関係

- ⊙ 頂点は、3 つのビーズの間の Y 字の交点。
- ⊙ 辺は、ビーズそのもの。
- ⊙ 面は、ビーズで囲まれた五個角形と六個角形。



- ・用語「五個角形」などは、ビーズの中心が必ずしも同一平面内である事を要しない事を意味していて、一般の幾何図形である多角形とは異なる概念である。

§ 2 ビーズ編みが全体として球面状（穴のない構造）の場合について

- ・五個角形の個数を p ，六個角形の個数を h とする。頂点，辺，面を v, e, f とする。

$$v - e + f = 2 \quad \text{and} \quad \begin{cases} v = (5p + 6h) / 3 \\ e = (5p + 6h) / 2 \Rightarrow p = 12 \\ f = p + h \end{cases} \quad \text{五個角形の個数は 12 である。}$$

§ 3 古典的なビーズ編みの紹介（30 球，90 球，120 球の例）



図 1 P12H0

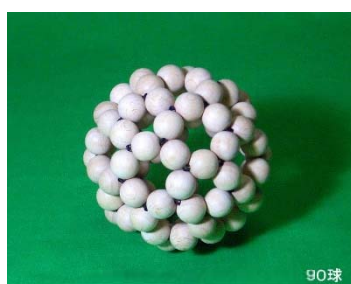


図 2 P12H20



図 3 P12H30

図 1 は、 $f = 12 + 0 = 12$ ， $v = (5 \times 12 + 6 \times 0) / 3 = 20$ ， $e = (5 \times 12 + 6 \times 0) / 2 = 30$

図 2 は、 $f = 12 + 20 = 32$ ， $v = (5 \times 12 + 6 \times 20) / 3 = 60$ ， $e = (5 \times 12 + 6 \times 20) / 2 = 90$

図 3 は、 $f = 12 + 30 = 42$ ， $v = (5 \times 12 + 6 \times 30) / 3 = 80$ ， $e = (5 \times 12 + 6 \times 30) / 2 = 120$

図1をP12H0 (Type)と呼び、他の例も同様とする。(P: Pentagon, H: Hexagon, 以下 Type : 略)

これらの例では六個角形の個数 h は $h = 0, 20, 30$ であるのだが、実際 $h = 3, 7, 19, \dots, 1000, \dots$ などのビーズ編みは可能なのだろうか。この問に対し考察する。

(本題に入る前の注意) ビーズ編みが存在すれば、球面上の五角形と六角形のみのグラフが存在するが、逆は必ずしも成り立たない事に注意する。

第2部【本題1】 § 4 「任意の非負の整数 h に対しビーズ編みP12H h は存在するか。あるいは、 h の条件」

主張 非負の整数 $h \neq 1$ に対してビーズ編みP12H h は存在する。

$h = 0$ に対しては、古典的なビーズ編みの紹介で最初に示しているので、存在している。

以下、 $h \geq 2$ に対して、P12H h の無限列を考え存在を証明する。

§ 5 「Cap と Connector について」

Cap とは2個ずつ組になったビーズが全体として12個の輪を持ち、その輪に繋がったP6H h 構造のビーズ編みのことである。使用する4種のCapを示す。

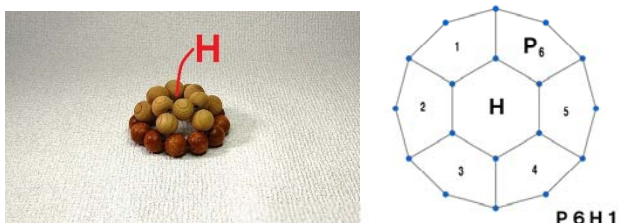


図4 P6H1

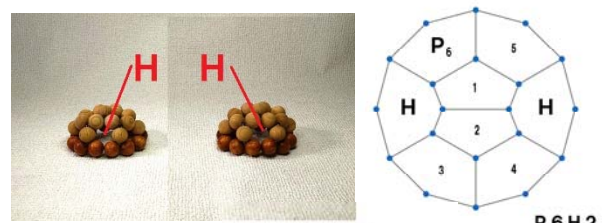


図5 P6H2

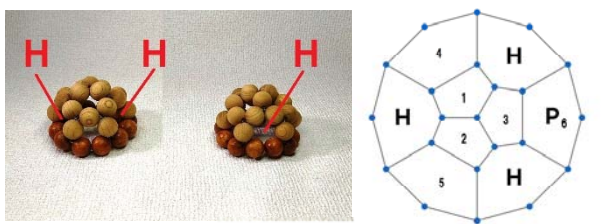


図6 P6H3

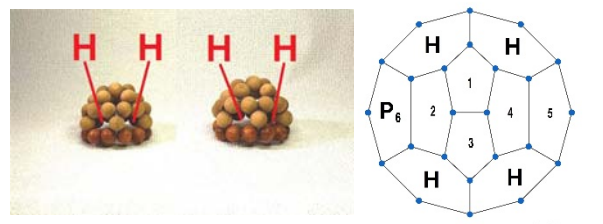


図7 P6H4

Connector とは Cap と同様にビーズが全体として 12 個となる輪を両端に持ち間に Hh ($h = 6, 12, 18, \dots$) 構造を持ったビーズ編みのことである。

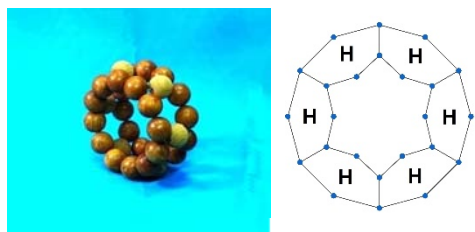


図8 H6



図9 H6とH12

図8はH6 1 個の場合。図9はH6とそれが2 個繋がったH12である。無論3 個、4 個・・・となる。

§ 6 P12Hh の構成法の具体例 (2 つの例P12H5, P12H11)



図10 P12H5 と P6H2, P6H3



図11 P12H11 と P6H2, H6, P6H3

図10 では、12 個の濃い色のビーズを同一視し2 つの Cap P6H2, P12H5 を繋ぐことで、P12H5 を構成できる。さらに図11 では、Cap P6H2 と Connector H6 そして Cap P12H5 を繋いで P12H11 を構成できる。

Connector をさらに増やせば、順に6 個角形の個数を順に6 ずつ増加されられる。したがって、この2 つの Cap と Connector を k 個使うことで、 $P12Hh$ ($h = 5 + 6k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$) を構成できる。

このような構成方法を用いて、次の6 系列 $P12Hh_0$ ($h_0 = 2, 3, 4, 5, 6, 7$) を構成できる。

- ◎P6H1+P6H1=P12H2
- ◎P6H1+P6H2=P12H3
- ◎P6H1+P6H3=P12H4
- ◎P6H2+P6H3=P12H5
- ◎P6H3+P6H3=P12H6
- ◎P6H3+P6H4=P12H7



図12 P12H2 から P6H7

これらの6系列と Connector を考え合わせれば6個角形を6ずつ増加させられるので、2つの Cap と Cap の間に Connector を $k(=0,1,2,\dots)$ 個入れる事で $P12Hh$ の h を $6k$ 個ずつ増加させることが出来る。つまり、 $P12Hh$ ($h=h_0+6k$, $h_0=2,3,4,5,6,7$, $k=0,1,2,3,\dots$) が構成できるから、2以上の h について $P12Hh$ が構成できる。したがって、非負の整数 $h \neq 1$ に対してビーズ編み $P12Hh$ は存在する。

第3部【本題2】 § 5 P12H1の非存在証明

本題に入る前に、グラフを作る過程で使用する性質を幾つかまとめておく。

[補助定理] 五角形のみを作る条件の下で、次の様なグラフにおいて辺を結ぶことが可能な方法のまとめ。

まず、図4の図Aから図Dの実線の横線の意味について確認する。横線の実線下部は5角形または6角形の内部を意味している。

例えば、図Aにおいて、点▲1を実線の上側に描いているが、実線下部は5角形または6角形の内部となることから、点●1と点▲1を結ぶ線分は実線下部には描けない。図B, C, Dについても同様である。

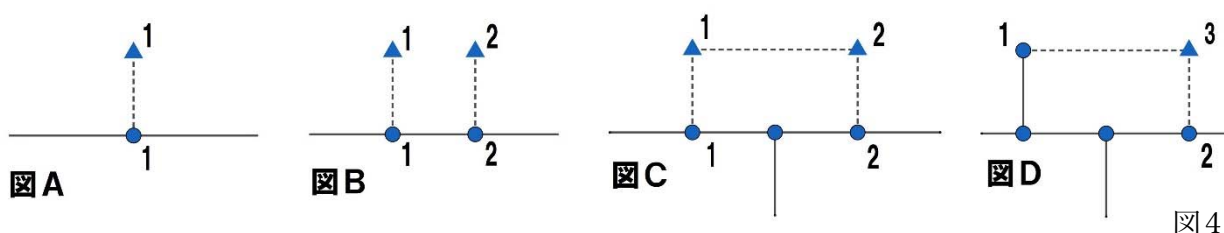


図4の図Aから図Dまで4つの場合について考える。点▲と点線で表されたモノは、最初存在していない。

図Aの点●1は、辺を2本持っているので3本目の辺は、別の点▲1と結ばれる。

図Bの場合も、図Aと同様に考えると、点●1, 2からそれぞれ点▲1, 2と結ばれる。

図Cの場合は、図Bと同じく点●と点▲の同番号を結ぶ。そして、全体として五角形を形作ることから、点▲1と点▲2を辺で結び、五角形をひとつ作るしかない。

図Dの場合は、2点●1, 2と新しい点▲3をそれぞれ結び、五角形をひとつ作るしかない。

[定理] 球面上のグラフでは12個の五角形と1個の六角形からなるグラフは存在しない。

[証明] 12個の五角形と1個の六角形からなる球面上のグラフがあると仮定し、このグラフを1個の六角形から始め、条件に反しない様にして、順に面や点、辺を増やしていくことで構成する。

$$f = 12 + 1 = 13, \quad v = (5 \times 12 + 6 \times 1) / 3 = 22, \quad e = (5 \times 12 + 6 \times 1) / 2 = 33$$

つまり、面13、頂点32、辺33となっている。…… (※)

六角形1つ以外はすべて五角形であることから、六角形の周りには五角形6個が配置される。(図5)

(補足) 図5について、球面上のグラフなので平面グラフのように内側とか外側の区別は無い事に注意。

6つの点◆1, 3, 5, 7, 9, 11からは3本目の辺が必要である。6つの点●2, 4, 6, 8, 10, 12にはすでに3本の辺があるから、これ以上辺を増やせない。

図5の◆, ●の点12, 1, 2, 3, 4のグラフから補助定理を使い、図6のような、◆, ●, ▲の点1, 2, 3, 14, 13の五角形を完成させるほかない。

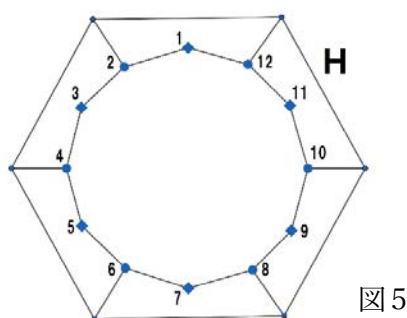


図5

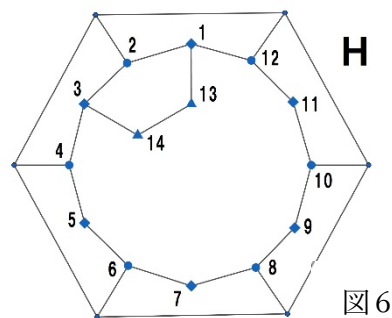


図6

図6の▲, ◆, ●の点14, 3, 4, 5, 6のグラフから同様に、図7のような、◆, ●, ▲の点3, 4, 5, 15, 14の五角形を完成させるほかない。

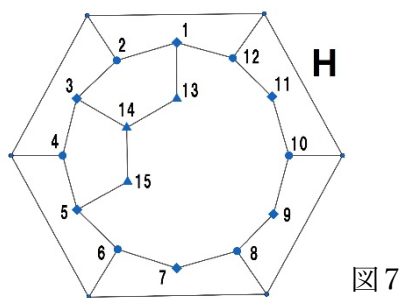


図7

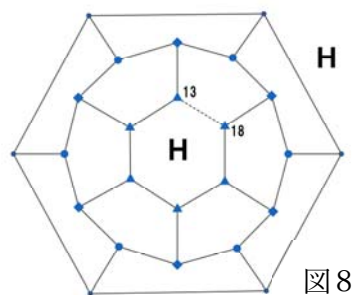


図8

この考えを続けると、図8の点線部分の辺(点▲13, 18)を除いたグラフができる。最後に、この点線で表示された辺を結び、12個の五角形を使ってグラフが完成した。

しかし、この図8は2個の六角形が存在しているので、元々六角形1個である事に矛盾する。 □

以上すべてをまとめ、五個角形と六個角形だけの穴のないビーズ編みは、6個角形の個数について、1個だけは無理であるが、他の個数はすべて編むことができる。

【後書き】 § 6 感想

例えばP12H0は1種類なのは明らかである。またP12H2は1種類と思うが、本当にそうだろうか。

例えばP12H6は数種類知っているが他にまだあるのか。さらに他のP12Hhの形は何種類あるだろう。

P12Hhのすべての形を調べ上げられるだろうか。