５個と６個の輪だけで編むビーズ編みの構造について

第１部【準備】§１　ビーズ編みについて

・ルール　⊙　使用するビーズの大きさは同じ。穴は中心を通るひとつ。編む糸をテグスと呼ぶ。

⊙　ビーズ編みは「エイトノット」編み。２つ以上のビーズに平行してテグスは通らない。

⊙　輪にするビーズの個数は，５個と６個のみ。これを<u>五個角形</u>，<u>六個角形</u>と呼ぶ。

・ビーズ編みと頂点と辺と面の関係

⊙　頂点は，３つのビーズの間のＹ字の交点。

⊙　辺は，ビーズそのもの。

⊙　面は，ビーズで囲まれた五個角形と六個角形。

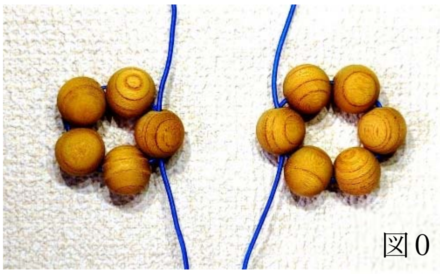


図０

・用語「五個角形」などは，ビーズの中心が必ずしも同一平面内である事を

要しない事を意味していて，一般の幾何図形である多角形とは異なる概念である。

§２　ビーズ編みが全体として球面状（穴のない構造）の場合について

・五個角形の個数を p，六個角形の個数を h とする。頂点，辺，面を v, e, f とする。

$$v-e+f=2 \text{ and } \begin{cases} v=(5p+6h)/3 \\ e=(5p+6h)/2 \\ f=p+h \end{cases} \Rightarrow p=12$$

五個角形の個数は１２である。

§３　古典的なビーズ編みの紹介（３０球，９０球，１２０球の例）

図１ P12H0

図２ P12H20

図３ P12H30

図１は，$f=12+0=12$，$v=(5\times12+6\times0)/3=20$，$e=(5\times12+6\times0)/2=30$

図２は，$f=12+20=32$，$v=(5\times12+6\times20)/3=60$，$e=(5\times12+6\times20)/2=90$

図３は，$f=12+30=42$，$v=(5\times12+6\times30)/3=80$，$e=(5\times12+6\times30)/2=120$

図１をP12H0（Type）と呼び，他の例も同様とする。(P:Pentagon,　H:Hexagon，以下 Type：略)

これらの例では六個角形の個数hは$h=0,20,30$であるのだが，実際$h=3,7,19,\cdots,1000,\cdots$などのビーズ編みは可能なのだろうか。この問に対し考察する。

・本題に入る前の注意 ： ビーズ編みが存在すれば，球面上の五角形と六角形のみのグラフが存在するが，逆は必ずしも成り立たない事に注意する。

第２部【本題１】§４　「任意の非負の整数hに対しビーズ編みP12Hhは存在するか。あるいは，hの条件」

主張　$\boxed{\text{非負の整数}h\neq 1\text{に対してビーズ編みP12H}h\text{は存在する。}}$

$h=1$以外のhに対し，具体的にビーズ編みP12Hhを作る事で存在を示す。

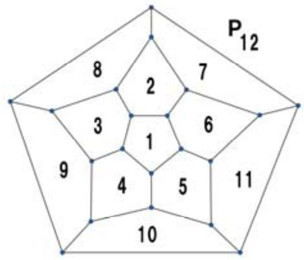
［Part A］$\boxed{h=0,2,3,4,5\text{ のP12H}h\text{は存在する。}}$

◎P12H0の例

古典的な３０球のビーズ編み。

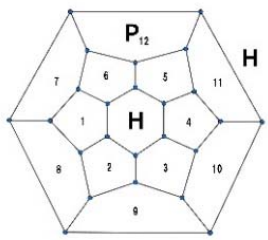
正十二面体の形をしている。§３の図１の例。

右側にグラフの参考図を付けた。



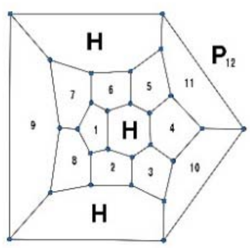
◎P12H2の例

上面と下面が六個角形であり，側面を12個の５個角形で取り囲む形



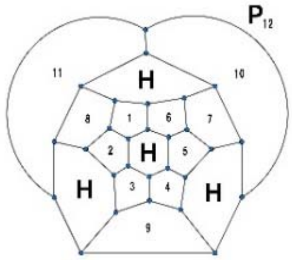
◎P12H3の例

下面に六個角形を配置し，側面の前後２カ所も六個角形を配置する。他の側面を１０個の五個角形で取り囲み，上面は２つの五個角形で覆う形。



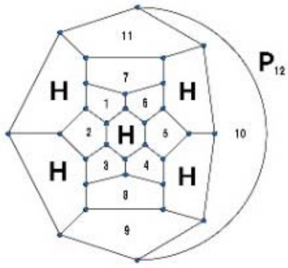
◎P12H4 の例

下面に六個角形を配置し，側面の１２０度の位置３カ所に六個角形を計３個配置する。他の側面に９個の五個角形で取り囲み，上面は３個の５個角形で覆う形。



◎P12H5 の例

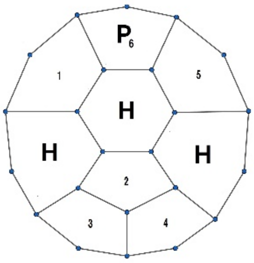
下面に六個角形を配置し，側面の前後を２カ所それぞれに２つの六個角形を計４個配置する。他の側面に８個の五個角形で取り囲み，上面は４つの五個角形で覆う形。



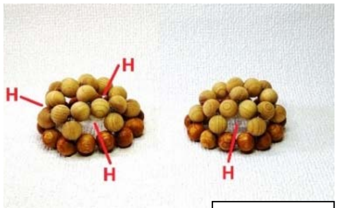
$h = 0,2,3,4,5$ に対して実際にビーズ編みを作る事で P12Hh の存在を示した。

【Top Cap と Bottom Cap の説明】

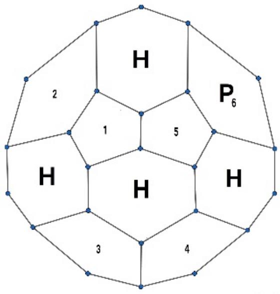
P6H3



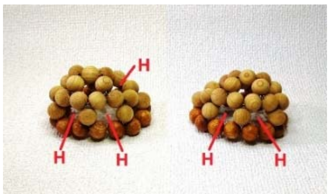
P6H3



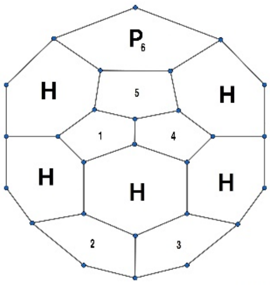
P6H4



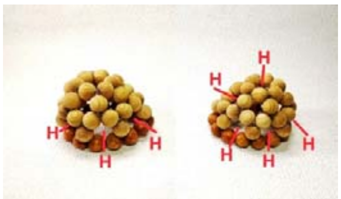
P6H4



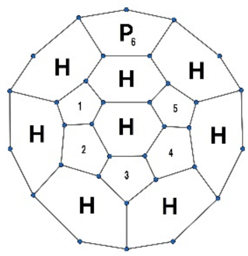
P6H5



P6H5



P6H8



P6H8

説明（P6H3 の場合）

五個角形６個と六個角形３個から構成されている。写真では濃い色の木球は１４個ある。実際にこの Top Cap と Bottom Cap を使う時は，濃い色の部品は同一視することで，Top と Bottom は，一体化する事が出来る。

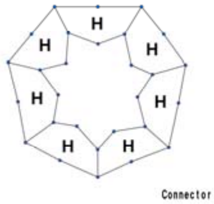
例えば，P6H3 と P6H4 を繋ぐと P12H7 を構成できる。以下，７種類のビーズ編みを作ることができる。

◎3＋3=6　◎3＋4=7　◎3＋5=8　◎4＋5=9　◎5＋5=10

◎3＋8=11　◎4＋8=12

（補足説明　この組合せの他にも様々考えられるが，【本題】の目的を考えると必要ない。）

【延長部品：Connector の説明】



この延長部品は，六個角形７個が環状に繋がっている。Top cap と Bottom Cap の間に，この部品をひとつ使用することでhを７増加させる事が出来る。また延長部品は複数個使用する事が出来るので，この Connector を$k\left(=0,1,2,\cdots\right)$個入れる事で$\mathrm{P12H}h$ のhを７ずつ増加させることが出来る。

具体的には，初期の形が$\mathrm{P12H}h_0$ の場合 Connector を$k\left(=0,1,2,\cdots\right)$個入れると$h=h_0+7k$ とできる。

［Part B］$\boxed{\text{非負の整数} h\geq 6 \text{ に対してビーズ編み} \mathrm{P12H}h \text{ が存在する。}}$

Top Cao と Bottom Cap の組み合わせにより７種の$\mathrm{P12H}h_0\left(h_0=6,7,8,9,10,11,12\right)$を構成できた。

【Top, Bottom Cap と Connector の関係】

Top Cap, Bottom Cap および Connector を$k\left(=0,1,2,\cdots\right)$個使用することで次の$\mathrm{P12H}h$ が存在する。

◎$h=6+7k$　◎$h=7+7k$　◎$h=8+7k$　◎$h=9+7k$　◎$h=10+7k$

◎$h=11+7k$　◎$h=12+7k$　$\left(k=0,1,2,\cdots\right)$

P12H(6+7k) (k=0,1,2,⋯)

P12H(7+7k) (k=0,1,2,⋯)

P12H(8+7k) (k=0,1,2,⋯)

P12H(9+7k) (k=0,1,2,⋯)

P12H(10+7k) (k=0,1,2,⋯)

P12H(11+7k) (k=0,1,2,⋯)

P12H(12+7k) (k=0,1,2,⋯)

すべての$h \geq 6$に対してビーズ編みP12Hhが存在することを示せた。

主張　$\boxed{\text{非負の整数} h \neq 1 \text{に対してビーズ編みP12H} h \text{は存在する。}}$

以上により，この［主張］は示された。

第３部【本題２】§５ $\boxed{\text{P12H1の非存在証明}}$

本題に入る前に，グラフを作る過程で使用する性質を幾つかまとめておく。

［補助定理］五角形のみを作る条件の下で，次の様なグラフにおいて辺を結ぶことが可能な方法のまとめ。

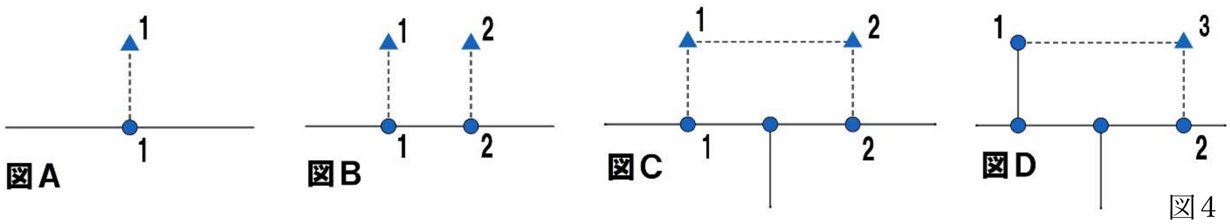


図４

図４の図Aから図Ｄまで４つの場合について考える。点▲と点線で表されたモノは，最初存在していない。

図Ａの点●1 は，辺を２本持っているので３本目の辺は，別の点▲1 と結ばれる。

図Ｂの場合も，図Ａと同様に考えると，点●1, 2 からそれぞれ点▲1, 2 と結ばれる。

図Ｃの場合は，図Ｂと同じく点●と点▲の同番号を結ぶ。そして，全体として五角形を形作ることから，点▲1 と点▲2 を辺で結び，五角形をひとつ作るしかない。

図Ｄの場合は，２点●1, 2 と新しい点▲3 をそれぞれ結び，五角形をひとつ作るしかない。

［定理］球面上のグラフでは１２個の五角形と１個の六角形からなるグラフは存在しない。

［証明］１２個の五角形と１個の六角形からなる球面上のグラフがあると仮定し，このグラフを１個の六角形から始め，条件に反しない様にして，順に面や点，辺を増やしていくことで構成する。

$$f = 12 + 1 = 13,\quad v = (5 \times 12 + 6 \times 1)/3 = 22,\quad e = (5 \times 12 + 6 \times 1)/2 = 33$$

つまり，面１３，頂点３２，辺３３となっている。‥‥‥（※）

六角形１つ以外はすべて五角形であることから，六角形の周りには五角形６個が配置される。(図５）

（補足）図５について, 球面上のグラフなので平面グラフのように内側とか外側の区別は無い事に注意。

６つの点◆1, 3, 5, 7, 9, 11 からは３本目の辺が必要である。６つの点●2, 4, 6, 8, 10, 12 にはすでに３本の辺があるから, これ以上辺を増やせない。

図５の◆, ●の点 12, 1, 2, 3, 4 のグラフから補助定理を使い，図６のような，◆, ●, ▲の点 1, 2, 3, 14, 13 の五角形を完成させるほかない。

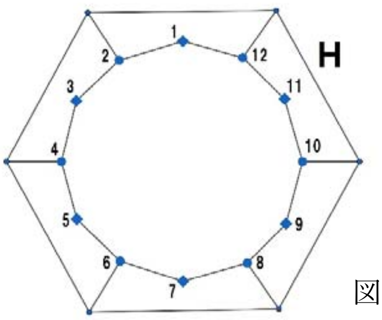


図５

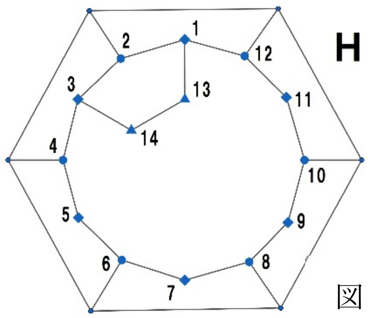


図６

図６の▲, ◆, ●の点 14, 3, 4, 5, 6 のグラフから同様に，図７のような，◆, ●, ▲の点 3, 4, 5, 15, 14 の五角形を完成させるほかない。

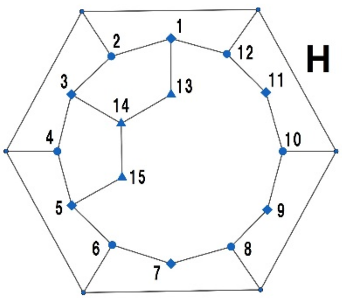


図７

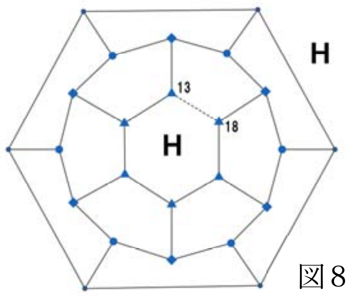


図８

この考えを続けると, 図８の点線部分の辺（点▲13, 18）を除いたグラフができる。最後に，この点線で表示された辺を結び，１２個の五角形を使ってグラフが完成した。

しかし，この図８は２個の六角形が存在しているので, 元々六角形１個である事に矛盾する。　□

以上すべてをまとめ，五個角形と六個角形だけの穴のないビーズ編みは, ６個角形の個数について，１個だけは無理であるが, 他の個数はすべて編むことができる。

最後に，例えばP12H2 は１種類のみ知られている。またP12H4 は２種類知られているが，これらの他の形はあるのかどうか。P12Hh のすべての形を調べ上げられるだろうか。

―― 堀部和経　2024/12/2 ――