正３角形・正４面体・正５胞体

＊＊＊正５胞体の紹介　高校生に向けて＊＊＊

§１　正三角形から正四面体

【Part1】　平面上の正三角形

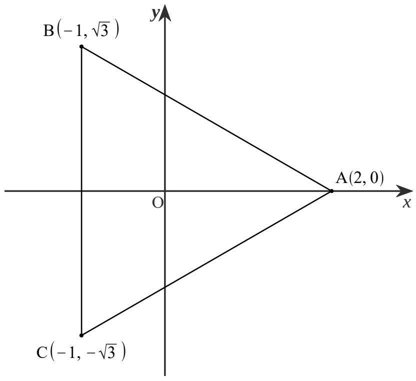

図１

３点 $A(2,0),B(-1,\sqrt{3}),C(-1,-\sqrt{3})$を考える。

３つの線分（辺）の長さを調べる。まず，

$$AB^2=(-1-2)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2=9+3=12$$

$$BC^2=(-1+1)^2+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2=0+12=12$$

$$CA^2=(2+1)^2+\left(0+\sqrt{3}\right)^2=9+3=12$$

なので， $AB=BC=CA=2\sqrt{3}$となり，三角形 ABC は正三角形である。

【Part2】　正三角形から，正４面体を作る。

Part1 の３点 A,B,C の座標に新たに z 座標を加える。そして，その値を 0 とする。

$$A(2,0,0),B\left(-1,\sqrt{3},0\right),C\left(-1,-\sqrt{3},0\right)$$

当然 $AB=BC=CA=2\sqrt{3}$となり，△ABC は正三角形である。

新たに，第４の点として $D\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$を考える。すると，

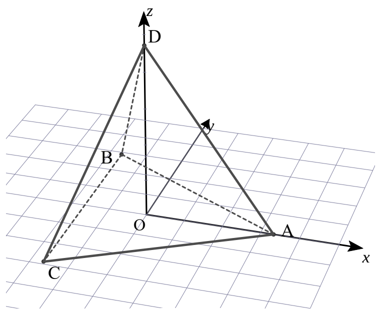

図２

$$AD^2=(0-2)^2+(0-0)^2+\left(2\sqrt{2}-0\right)^2=4+0+8=12$$

$$BD^2=(0+1)^2+\left(0-\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}-0\right)^2=1+3+8=12$$

$$CD^2=(0+1)^2+\left(0+\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}-0\right)^2=1+3+8=12$$

なので， $DA=DB=DC=2\sqrt{3}$となる。したがって，△DAB，△DBC，△DCA はすべて正三角形となる。

よって，ABCD の４つの面はすべて正三角形となる。（記号: 四面体とする。）

この四面体を， z 軸の真上から正射影した図「影」は、図３の様になる。

４つの三角形の内、△DAB，△DBC，△DCA は一見すると正三角形には見えないが，これは「影」である。正三角形には見えないが，正三角形であることは計算で確認されている。ここに見えている４つの三角形△ABC，△DAB，△DBC，△DCA はすべて正三角形である。

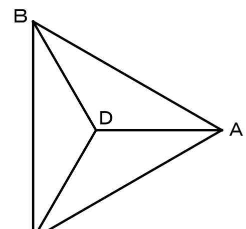

図３

【Part3】Part1 のまとめ

$$f:\ \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto (x,y,0)$$

平面座標に空間座標の第 3 の成分 $z=0$ の点を対応させることで，平面上の点を空間内の点に置き換えるという変換 f で，2 次元の点を 3 次元に自然に対応させた。

次のセクションでは，空間内の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ を 4 次元空間（と呼ぶ）の第 4 の成分 $u=0$ を対応させる変換 g を考える。

$$\mathrm{g}:\ \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^4$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,y,z,0)$$

この変換で，空間内の点を 4 次元空間内の点に自然に対応させ，目的の「正 5 胞体の紹介」をする事にしよう。

§2　正 4 面体から正 5 胞体

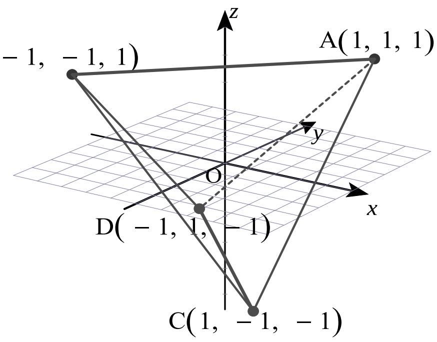

図 4

【Part1】　空間内の正 4 面体

空間内の 4 点

$$\mathrm{A}(1,1,1),\mathrm{B}(-1,-1,1),\mathrm{C}(1,-1,-1),\mathrm{D}(-1,1,-1)$$

を考える。まず，6 つの線分の長さを調べる。

$$\mathrm{AB}^2=(-1-1)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2=4+4+0=8$$

となる。また，同様に，

$$\mathrm{AC}^2=0+4+4=8,\quad \mathrm{AD}^2=4+0+4=8,\quad \mathrm{BC}^2=4+0+4=8,$$
$$\mathrm{BD}^2=4+0+4=8,\quad \mathrm{CD}^2=4+4+0=8$$

であるから，6 つの線分の長さはすべて等しく，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2\sqrt{2}$$

となっている。したがって，$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{ABD}\equiv\triangle\mathrm{ACD}\equiv\triangle\mathrm{BCD}$ はすべて，1 辺 $2\sqrt{2}$ の正 3 角形であるので，4 面体 ABCD は正 4 面体である。

【Part2】　正 4 面体から正 5 胞体をつくる

Part1 の空間内の 4 点 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}$ に新たに u 座標を加える。そして，その値を 0 とする。

$$\mathrm{A}(1,1,1,0),\mathrm{B}(-1,-1,1,0),\mathrm{C}(1,-1,-1,0),\mathrm{D}(-1,1,-1,0)$$

当然 $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2\sqrt{2}$ なので，

$$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{ABD}\equiv\triangle\mathrm{ACD}\equiv\triangle\mathrm{BCD}\ :\ 1\text{ 辺 }2\sqrt{2}\text{ の正三角形}$$

したがって，ABCDは正四面体である。

新たに，第５の点 $\mathrm{E}\left(0,0,0,\sqrt{5}\right)$ を考える。すると，

$$\mathrm{AE}^2=(0-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2+\left(\sqrt{5}-0\right)^2=1+1+1+5=8$$

であり， $\mathrm{EB}^2=\mathrm{EC}^2=\mathrm{ED}^2=8$ なので， $\mathrm{EA}=\mathrm{EB}=\mathrm{EC}=\mathrm{ED}=2\sqrt{2}$ である。したがって，

$$\triangle\mathrm{EAB}\equiv\triangle\mathrm{EAC}\equiv\triangle\mathrm{EAD}\equiv\triangle\mathrm{EBC}\equiv\triangle\mathrm{EBD}\equiv\triangle\mathrm{ECD}$$ ：１辺 $2\sqrt{2}$ の正三角形

したがって，

EABC ≡ EABD ≡ EACD ≡ EBCD ：正４面体

であることが分かる。

このように計算した結果、正５胞体は５つの正４面体から構成された立体である。

この正５胞体を，u 軸の真上から正射影した図「影」は、図５の様になる。４次元空間を３次元空間に落とした影の図である。

当然のことであるが，紙面に印刷すると言うことは，３次元空間への影をさらに平面化してある図は，さらにそれを２次元化した「影」である。

４つの四面体、EABC，EABD，EACD，EBCD は，一見すると正４面体には見えないが，正４面体であることが計算で確認されている。

したがって，５つの４面体、ABCD，EABC，EABD，EACD，EBCDはすべて正４面体である。

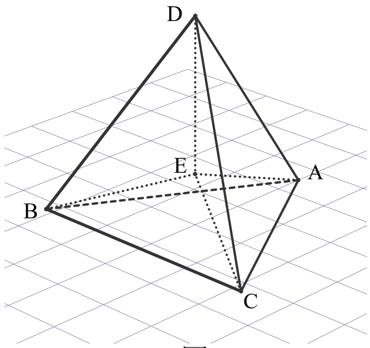

図５

以上のことをまとめると，

４次元空間内の５点A,B,C,D,Eからできている立体は，

- ・正４面体５個で構成されている。（$_5C_4=5$）
  （このことから，<u>正５胞体</u>と呼ばれている。）
- ・正３角形１０個で構成されている。（$_5C_3=10$）
- ・辺は１０本で構成されている。（$_5C_2=10$）
- ・頂点は５点で構成されている。（$_5C_1=5$）（←説明不用）

［参考文献］　平澤美可三「４次元正多面体入門　正多胞体の内訳と構成」
数学セミナー2021年９月号（第60巻９号通算719号）p.8～p.15

2023-11-19　堀部和経