正五胞体の紹介　［高校生に向けて］

＊＊＊点・線分・正三角形・正四面体・正五胞体＊＊＊

§1　正単体

点を　0**次元正単体**，線分を　1**次元正単体**，正三角形を2**次元正単体**，正四面体を3**次元正単体**という．

一般に，n次元の図形で，その境界が$n+1$個の$n-1$次元正単体から成るものを　n**次元正単体**という．

以下，4**次元正単体**（正五胞体と呼ばれている）を紹介するために，その図形を構成する点の座標の計算を詳細に説明する．

§2　点から線分へ

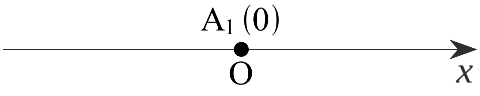

図 1

まず点$A_1(0)$を考える．点は0次元正単体である．

新たにx軸の正の部分に，$A_1B_1=1$となる点B_1をとる．（線分の長さ1をh_1で表す．）

そのx座標は1であるから$B_1(1)$．このとき線分A_1B_1は，1次元正単体となっている．

§3　正三角形

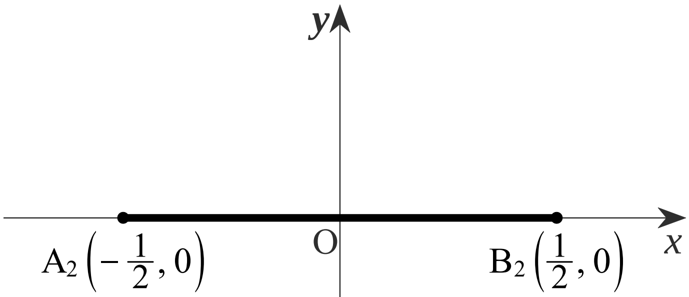

図 2

線分A_1B_1の重心（中点）を原点にするため，

x軸の負の方向に$\frac{1}{2}$だけ平行移動したのち，

y座標（値は$y=0$）を追加すると，

$$A_2\left(-\frac{1}{2},0\right),B_2\left(\frac{1}{2},0\right).$$

新たに，y軸の正の部分に$B_2C_2=1$となる点C_2をとると，そのy座標h_2は，

$$h_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって$C_2\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$となる．このとき$A_2C_2=1$であり，元々$A_2B_2=1$であるから三角形$A_2B_2C_2$は正三角形，つまり2次元正単体である．

三角形$A_2B_2C_2$の重心は，

$$\frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)+\left(\frac{1}{2},0\right)+\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

§ 4　正四面体

正三角形 $A_2B_2C_2$ の重心を原点にするため，y 軸の負の方向に $\frac{\sqrt{3}}{6}$ だけ平行移動したのち，z 座標（値は $z=0$）を追加すると，

$$A_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right), B_3\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right), C_3\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right).$$

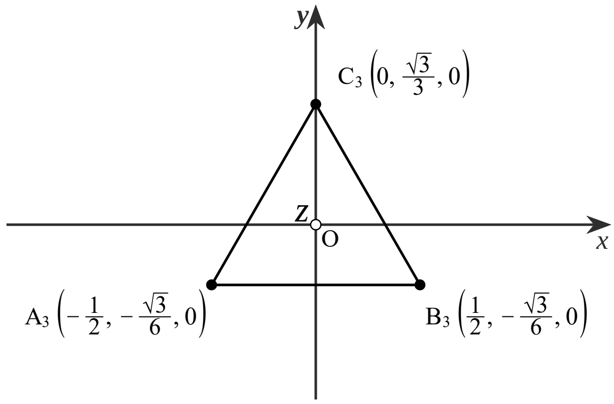

図３

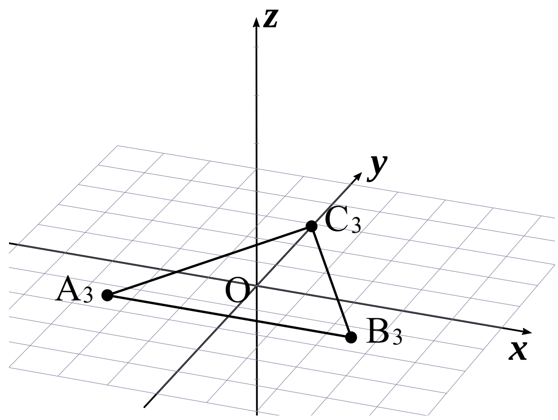

図４

新たに，z 軸の正の部分に $C_3D_3=1$ となる点 D_3 をとると，その z 座標 h_3 は，

$$h_3=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

よって $D_3\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ となる．このとき $A_3D_3=B_3D_3=1$ となっている．

元々 $A_3B_3=B_3C_3=C_3A_3=1$ である 3 点 A_3,B_3,C_3 を平行移動した点と D_3 を合わせた 4 点 A_3,B_3,C_3,D_3 からなる図形の辺長はすべて1である．つまり四面体 $A_3B_3C_3D_3$ は正四面体，つまり3次元正単体である．

線分の中点や正三角形の重心を求める方法と同様に，正四面体 $A_3B_3C_3D_3$ の重心は，

$$\frac{1}{4}\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)+\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)+\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)+\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}=\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{12}\right).$$

§ 5　正五胞体

正四面体 $A_3B_3C_3D_3$ の重心を原点にするため，z 軸の負の方向に $\frac{\sqrt{6}}{12}$ だけ平行移動したのち，u 座標（値は $u=0$）を追加すると，

$$A_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{12},0\right),\ B_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{12},0\right), C_4\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{12},0\right),$$

$$\mathrm{D}_4\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{4},0\right).$$

x座標・y座標・z座標に続く第4の座標をu座標と呼んでいる．

また,図５の中に点線の矢印でu軸を描いてあるが，実際はどのような方向なのか，三次元の中で暮らしている我々には，考えられない”方向” であろう．

u軸については,どちらに向いているか分からないが，第４の座標軸をイメージして欲しい．

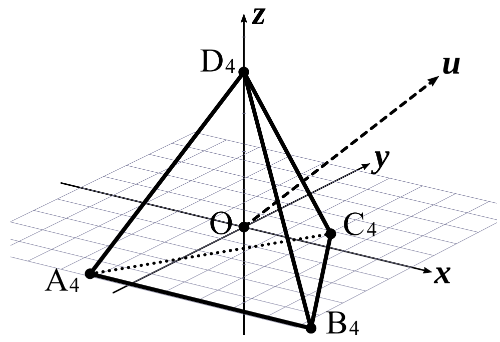

図５

新たに，u軸の正の部分に$\mathrm{D}_4\mathrm{E}_4=1$となる点$\mathrm{E}_4$をとると，その$u$座標$h_4$は,

$$h_4=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

よって$\mathrm{E}_4\left(0,0,0,\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$となる．このとき$\mathrm{A}_4\mathrm{E}_4=\mathrm{B}_4\mathrm{E}_4=\mathrm{C}_4\mathrm{E}_4=1$となっている．

そして$\mathrm{A}_4\mathrm{B}_4=\mathrm{A}_4\mathrm{C}_4=\mathrm{A}_4\mathrm{D}_4=\mathrm{B}_4\mathrm{C}_4=\mathrm{B}_4\mathrm{D}_4=\mathrm{C}_4\mathrm{D}_4=1$であった４点$\mathrm{A}_4,\mathrm{B}_4,\mathrm{C}_4,\mathrm{D}_4$を平行移動した点と$\mathrm{E}_4$を合わせた5点$\mathrm{A}_4,\mathrm{B}_4,\mathrm{C}_4,\mathrm{D}_4,\mathrm{E}_4$からなる図形の辺長はすべて1である．この5点からなる図形を正五胞体という．

§６　n次元正単体とその影

線分・正三角形・正四面体・正五胞体をそれぞれひとつ低い次元へ射影した図形（いわゆる「影」）を考える．

線分をx軸方向から見た図形を考える．線分も下図の様に1点に見える．これは，元々点2個の影である．（図６）

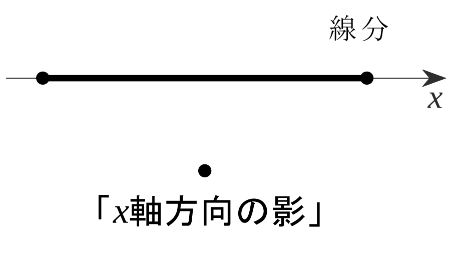

図６

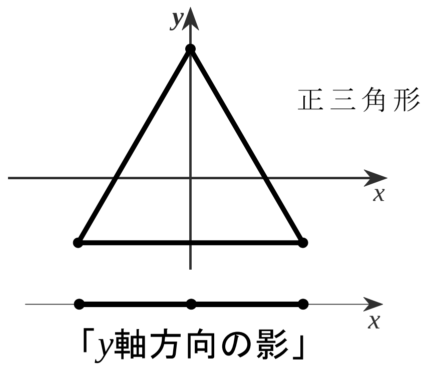

図７

正三角形をy軸方向から見た図形を考える．正三角形も3点が並んだ線分に見える．これは，左端と中央・中央と右端・左端と右端を結んだ3本の線分と見ることができる．そして これらは，元々同じ長さの線分3本の影である．（図７）

正四面体を z 軸方向から見た図形を考える．正四面体も三角形状に並んだ3個の点の中に4番目の点が見え，それら4点がそれぞれ結ばれた線分が見える．この図形は，外側に正三角形があり，中には鈍角二等辺三角形が3個見える．しかしこれら4個の三角形は，上の図をみれば明らかなように，元々は正三角形4個の影である．（図８）

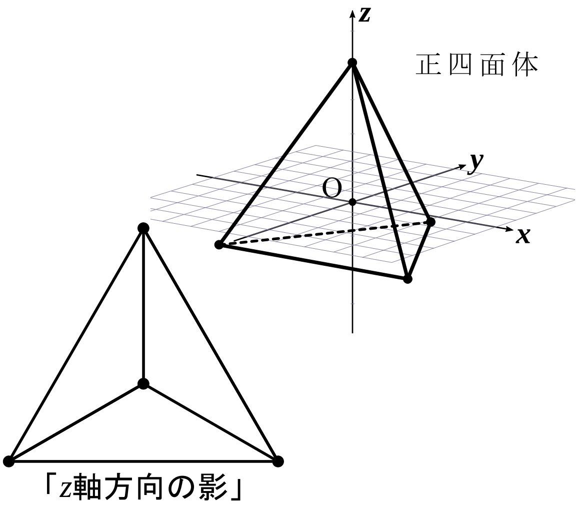

図８

図形？
正五胞体

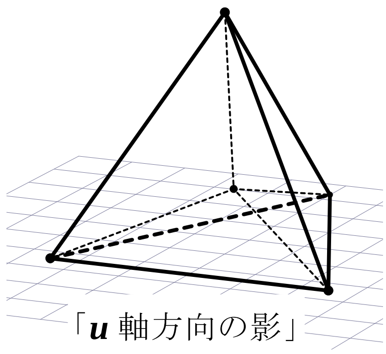

図９

正五胞体の図形は私達には見えないが，u 軸方向から見た図形を考える．その図形は3次元の図形で正四面体（三角錐）とその重心に5番目の点が見え，それらをすべて結んだ線分が見える．外側には,大きな正四面体が見え，その中には,高さの低い正三角錐が４個見えるはずである．これら5個の三角錐は,元々は正四面体5個の影である．（図９）

図９の補足をすると，正五胞体は４次元の図形なので,その影は3次元の立体（図形）である．それを紙面に表すために三次元の立体（図形）を平面に印刷した「見取り図」なっている．

参考文献　「n次元正単体の座標の求め方」小谷健司（愛知教育大学）　2023-11-28

堀部和経　2023-12-01（12-08改）