マルコフの不等式 と チェビシェフの不等式

・チェビシェフの不等式の証明をマルコフの不等式から**簡単**に証明しよう。
但し、この**簡単**は，短い証明という意味である。理解しやすいかどうかは？！

［マルコフの不等式］ Markov's inequality
非負の確率変数 X と任意の正の数 α に対して次の不等式が成立する。

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X)$$

（但し，$E(X)$ の存在は仮定）

［証明］連続でも離散でも同様なので，ここでは連続の場合で示す

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x\, f(x) dx = \int_{0}^{\alpha} x\, f(x) dx + \int_{\alpha}^{\infty} x\, f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} x\, f(x) dx$$

$$\geq \int_{\alpha}^{\infty} x\, f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha\, f(x) dx = \alpha \int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx = \alpha P(X \geq \alpha) \qquad \blacksquare$$

［補足］　離散の場合は，「積分」を「総和」に変える事で示される。

［チェビシェフの不等式］ Chebyshev's inequality
確率変数 X の平均 $E(X) = m$, 標準偏差 $\sqrt{V(X)} = \sigma$ と任意の $k(>0)$ に対して，

$$P(\ |X - m| \geq k\sigma\ ) \leq \frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。
［証明］
確率変数 $Y = |x - m|^2$ は非負の確率変数である。また $(k\sigma)^2 = \alpha$ とおく。

マルコフの不等式により $P(Y \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Y)$ である。

$$P(|X - m| \geq k\sigma) = P\left(|X - m|^2 \geq (k\sigma)^2\right) = P(Y \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Y)$$

$$= \frac{1}{(k\sigma)^2} E\left(|X - m|^2\right) = \frac{1}{(k\sigma)^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2} \qquad \blacksquare$$

2022/06/28 堀部和経