2023/1/24 14:30～

知多地区数学研究会　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　阿久比公民館大会議室にて

興味深い話題作りのために

「数学と人間の活動」をふまえて

堀部　和経

高等学校学習指導要領に数学編数学Ａ（３）**数学と人間の活動**という内容が示されている。
今日は，ここにスポットを当てたお話をしたいと思います。

これから紹介する Web-Site に掲載されている話題はそのままの形でも，使いやすいように修正していただいて良いので，自由に教育の場面等でお使い下さい。

Web-Site「数学 と その周辺」https://horibe.jp/　を使ってお話しします。
本館・地下１階「数学 問題 蔵」に現在６２編の話題が掲載されています。
今日は，その中から時間の許す限り，表題に関係する話題を紹介したいと思います。

話をする順序を変えるかも知れませんが，今日の話題の一覧を作りました。

① 「５７」不定方程式$70x+51y=1$を満たす整数
　　（あまり知られていない）互除法の筆算
② 「３５」(伊豆）江川邸の算額
　　江川英毅（ひでたけ）の奉納した算額の問題
③ 「４２」ＣＴ(Computed Tomography)と数学について
　　ＣＴの基礎は数学にある
④ 「４４」Prince Rupert's Cube
　　立方体は同じ大きさの立方体を突き抜けるか
⑤ 「１７」ユークリッドの素数定理
　　「素数は無限個ある」というあの定理の新証明
⑥ 「２７」白から黒へ「変化」する$n\times n$型のボード
　　（あるルールの下）初期配置の黒マスの数がnより少ないとき，
　　どのような初期配置でもボードのマス全てが黒に「変化」することはない
⑦ 「１３」展開図が三角形の四面体
　　三角形を折り曲げて四面体を作る
⑧
・
・

①「５７」

互除法の筆算

不定方程式の１つの解を求めるとき，筆算を使う方法がある。次の例でその方法を見てみましょう。

（例）　$70x+51y=1$ を満たす整数 x, y を求めよ。

$\boxed{ア}$　最初に x， y の係数を上下に並べ，その右側に 1 と 0 を次の様な位置にかく。

↓ここはこう書く

x の係数	→	70	1	0
y の係数	→	51	0	1

$\boxed{イ}$　１行目と２行目の左端の数を使って，商 $70\div51$ を計算し，商をその左に書いておく。

$$\begin{array}{r|rrr} & 70 & 1 & 0 \\ \boxed{1}\,) & 51 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$\boxed{ウ}$　（１行目の数）－（$\boxed{イ}$で書いた数）×（２行目の数）を計算し，３行目に書いていく。

$$\begin{array}{r|rrr} & 70 & 1 & 0 \\ 1\,) & 51 & 0 & 1 \\ \hline & \boxed{19} & \boxed{1} & \boxed{-1} \end{array}$$

$70-1\times51=19$ ⇑

$1-1\times0=1$ ⇑

$0-1\times1=-1$ ⇑

$\boxed{エ}$　次に１行目と２行目の数を使って，$\boxed{イ}$と同じように商（$51\div19$ の商は 2）を書く。

$$\begin{array}{r|rrr} & 70 & 1 & 0 \\ 1\,) & 51 & 0 & 1 \\ \hline \boxed{2}\,) & 19 & 1 & -1 \end{array}$$

$\boxed{オ}$　$\boxed{ウ}$と同様に（２行目の数）－（$\boxed{エ}$で書いた数）×（２行目の数）を計算し，４行目に書いていく。

$$\begin{array}{r|rrr} & 70 & 1 & 0 \\ 1\,) & 51 & 0 & 1 \\ \hline 2\,) & 19 & 1 & -1 \\ \hline & \boxed{13} & \boxed{-2} & \boxed{3} \end{array}$$

$51-2\times19=13$ ⇑

$0-2\times1=-2$ ⇑

$1-2\times(-1)=3$ ⇑

カ　これを左側の数が $\boxed{1}$ になるまで繰り返す。（真ん中の数）$=x$，（右側の数）$=y$ となっている。

	70	1	0
1)	51	0	1
2)	19	1	-1
1)	13	-2	3
2)	6	3	-4
	1	-8	11
こうなるまで繰り返す	⇑	⇑	⇑
		これが x の値 -8 ⇑	⇑
			これが y の値11 ⇑

キ　以上から，不定方程式 $70x+51y=1$ を満たす整数の１つは，$x=-8,\ y=11$ である。
確かに，$70\times(-8)+51\times11=-560+561=1$ となっていて，不定方程式の解の１つとなっている。

ク　いま見てきた筆算に現れる数に，記号や数を追加して，計算の構造を見てみよう。

１行目　$70=70\times\ 1\ +51\times\ 0$ ……①
２行目　$51=70\times\ 0\ +51\times\ 1$ ……②
３行目　$19=70\times\ 1\ +51\times(-1)$ ……③
４行目　$13=70\times(-2)+51\times\ 3$ ……④
５行目　$6=70\times\ 3\ +51\times(-4)$ ……⑤
６行目　$1=70\times(-8)+51\times\ 11$ ……⑥

①から⑥は，すべて $k=70\times a+51\times b$ の形をしている。これらの等式を何倍かしたり両辺を足したり引いたりして，与えられた不定方程式を⑥の形に変形していることがわかる。

ケ　最後に，次の不定方程式をこの筆算で再確認してみよう。
（例・その２）　$17x+10y=1$ を満たす整数 x, y を求めよ。

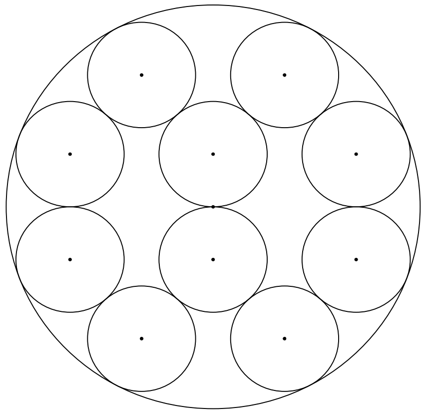
	17	1	0
1)	10	0	1
1)	7	1	-1
2)	3	-1	2
	1	3	-5

したがって，$17x+10y=1$ を満たす整数のひとつの組は，$x=3,\ y=-5$ である。

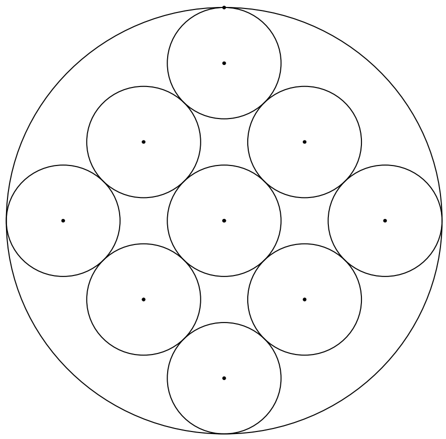
［確認］　$17\times3+10\times(-5)=51-50=1$ となっている。

②「３５」　　**江川邸の算額**

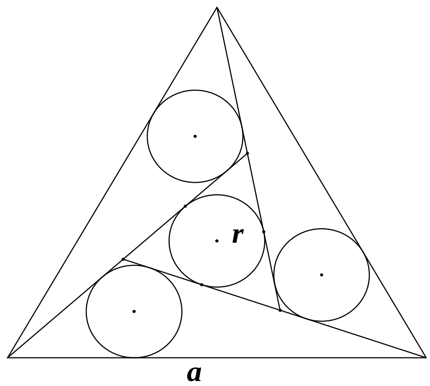
［問題１］　図のように，半径Rの大円の中に，半径rの円が１０個接している。
（円の配置は，上下対称かつ左右対称である。）
　このとき，Rとrの関係式を求めよ。



［問題２］　図のように，半径Rの大円の中に，半径rの円が９個接している。
（円の配置は，上下対称かつ左右対称である。）
　このとき，Rとrの関係式を求めよ。



［問題３］　図のように，一辺がaの正三角形の中に４つの三角形があり，それらの内接円の半径がすべて等しくrである。
　このとき，aとrの関係式を求めよ。



［メモ］
　ここでは，問題１・問題２と分けて説明しているが，元の算額では，ひとつの問題として書かれている。二つ目の問題として，問題３が出題されている。
　この江川邸の算額は，享和２年（１８０２）江川英毅（１７７０－１８３４）が土祠に奉納したもので，横９０．３ｃｍ縦４４．３ｃｍの小型算額である。和算書「賽祠神算」に記録されており現存は確認されていなかったが，平成２４年江川邸の倉庫で発見された。
　また，算額は公益財団法人江川文庫の所蔵となっている。　　　　　　　　　　（深川英俊氏談）

③「４２」　スライド　参照

④「４４」　スライド＋模型　参照

⑤「１７」　ユークリッドの素数定理の新証明

「素数は，無限個ある」という，ユークリッド（エウクレイデス）の証明は，簡素で力強いものだ。そして，それから２０００年以上たった現代に，その証明を超えたのではないかという新しい証明方法が発見された。(American Math. Manthly, Vol 113,No.10,December 2006)

証明したのは，フィリップ・サイダック（ノース・カロライナ大学グリーンズボロ校 University of North Carolina at Greensboro）だ。

ユークリッドの証明法（現代風）の後に，サイダックの証明を紹介する。

【定理】素数は無限個ある

ユークリッドの証明
素数は有限個で，個数は n 個であるとする。その素数をすべて書き出し $P_1,P_2,\cdots,P_n$ とする。今， $P=P_1\times P_2\times\cdots\times P_n+1$ とおくと， P は，すべての $P_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ と異なる。更に，すべての $P_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ で， P を割ると余りは１となり，割り切れない。したがって， P は， $P_1,P_2,\cdots,P_n$ と異なる素数である。よって，素数の個数は $n+1$ 個となった。これは，素数が有限個で，個数を n 個であるとしたことに矛盾する。 故に，素数は無限個ある。　証終

サイダックの証明
N を１より大きい自然数とする。 N と $N+1$ は，連続する自然数なので，互いに素である。したがって， $N_2=N\left(N+1\right)$ は，少なくとも２つの異なる素因数をもつ。同様に， N_2 と N_2+1 は，連続する自然数であるから， $N_3=N_2\left(N_2+1\right)$ は，少なくとも３つの異なる素因数をもつ。 この操作は，無限に続けることが可能。　証終

この証明の構造は，ユークリッドの証明に負けないほど単純だ。なぜ今まで誰も発見できなかったのか。そして，「この証明は，不思議なほど簡単で美しい」と思いませんか。

オリジナルの証明です。

Theorem.　There are infinitely many primes.　Filip Saidak's proof
Let n > 1 be a positive integer. Since n and n+1 are consecutive integers, they must be coprime, and hence the number N2 = n(n + 1) must have at least two different prime factors. Similarly, since the integers n(n+1) and n(n+1)+1 are consecutive, and therefore coprime, the number N3 = n(n + 1)[n(n + 1) + 1] must have at least 3 different prime factors. This can be continued indefinitely.

参考文献　http://www.uncg.edu/~f_saidak/euclid.pdf

⑥「２７」　白から黒へ変化する$n \times n$型ボード　　　～感染ゲーム～

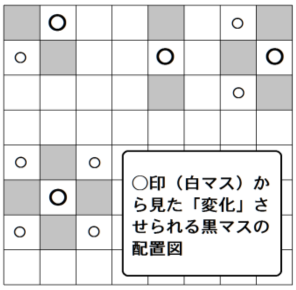


図１

白から黒へ「変化」する

正方形のボードのマス目が白と黒に分かれている。このとき，次のルールに従って順次マスの色が「変化（感染)」していくものとする。

ルール①　白マスの四方向（上下左右）のうち２カ所以上が黒マスのとき，その白マスは黒マスに「変化」する。(図１参照)

ルール②　黒マスは白マスに「変化」しない。

（例）8×8型のチェッカーボードの場合

図２，３のような８個黒マスの初期配置から，ボードのマス全てが黒マスに「変化」する事を確認して下さい。

また，どの白マスから「変化」させていくかの順序によらず最終的な白マスと黒マスの配置は同じである事を確認して下さい。

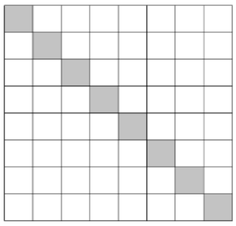


図２

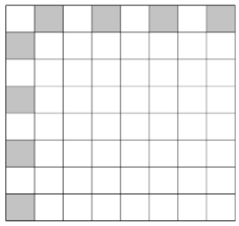


図３

では，次のことを証明して下さい。

$n \times n$型の正方形のボードがあり，初期配置の黒マスの数がnより少ないとき，どのような初期配置にしてもボードのマス全てが黒に「変化」することはない。

［証明］ルール①で「変化」する白マスに関して，その上下左右の黒マスの配置は，次のように４つに分類できる。(図４）但し，回転や対象移動で重なるものは同一視している。

矢印は元の黒マスを表し，丸印は白マスから黒マスに「変化」するマスを表している。

ＡからＤにおいて「変化」する前後の，黒マスの境界線の長さ，つまり黒マス部分の周囲長を測る。但し，マスの１辺を１とする。

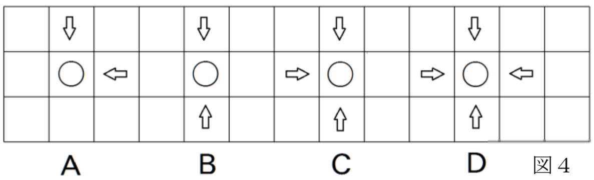


図４

Ａでは「変化」前は２マスが黒で，その周囲長は８であり，「変化」後は３マスが黒であり，周囲長は８である。同様にＢからＤの「変化」前後の周囲長を調べ表にする。(下表)

このことから，このルールにしたがってマスの色が「変化」すると黒マスの周囲長は，同じか減少する。つまり，決して増加はしない。

周囲長	A	B	C	D
感染前	8	8	１２	１６
感染後	8	8	１０	１２

さて，ここから命題を背理法で示す。

初期配置の黒マスの数がnより少ないので，黒マス部分の周囲長の最大値は$4(n-1)$である。ところが，「変化」させた後ボード全てが黒マスであるので，その周囲長は$4n$となり，矛盾。　　　　［証終］

［補足］「周囲長が$4n$の初期配置をすれば必ず全てのマスを感染できる」とは限らない。

⑦「１３」　模型　参照

⑧・・・⑨・・・⑩・・・