i^i の値

虚数単位 i の i 乗とは、いったい何だろうか？？？
この値を求めてみよう。

§１　オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　について

こんな説明では，どうかな？　・・・

$$f(x)=(\cos x-i\sin x)e^{ix}$$

とおく，すると

$$f'(x)=(-\sin x-i\cos x)e^{ix}+(\cos x-i\sin x)ie^{ix}$$
$$=(-\sin x-i\cos x)e^{ix}+(i\cos x-i^2\sin x)e^{ix}$$
$$=(-\sin x-i\cos x+i\cos x+\sin x)e^{ix}=0\times e^{ix}=0$$

したがって，$f'(x)=0$ より $f(x)=(\cos x-i\sin x)e^{ix}$ は定数関数となります。

$$f(x)=f(0)=(\cos 0-i\sin 0)e^{i\cdot 0}=1$$

つまり、$(\cos x-i\sin x)e^{ix}=1$　なので

$$e^{ix}=\frac{1}{\cos x-i\sin x}=\cos x+i\sin x$$

となり，オイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　を得る事ができました。

§２　i^i　の値について

オイラーの公式に，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

を得る。したがって，

$$i^i=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i=e^{i^2\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}\quad,\quad\left(=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)\quad,\quad\left(=\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}\right)\quad,\quad(=0.20787957635\cdots)$$

この話題は、よく聞く話です。特に誰のアイデアという事は知りません。しかし、誰かが最初に考えたのは明らかですね・・・。　堀部和経

注意　$\theta=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ を代入しても，$e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=i$ となります。
いろいろ微妙な事がありそうですね。ここでは，それには触れないでおきます。