チェビシェフの不等式 と 大数の法則 （高校生に向けて）

確率分布の平均（期待値），分散などの基本性質から，チェビシェフの不等式、大数の法則までを高校生に向けて、ていねいに説明・証明をした。具体的には，計算過程を急がず，一段一段確認しながら進める。

［記号］一般的な記号は既知とするが、確認のために次を記す。

事象 A の起こる確率 $P(A)$，　確率変数 X

平均（期待値） $m=E(X)$，　分散 $\sigma^2=V(X)$，　標準偏差 σ

［準備１］確率分布が右の表の場合

$$P(x_i)=p_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1, \qquad m=E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$V(X)=E\left((X-m)^2\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-m)^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \cdots ① \quad , \quad \sigma=\sqrt{V(X)}$$

［証明①］

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-m)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i{x_i}^2-2p_imx_i+p_im^2\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i{x_i}^2-2m\sum_{i=1}^{n} p_ix_i+m^2\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$=E(X^2)-2m^2+m^2=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$ ■

特に確率分布が右の表の場合

X	a	b	計
P	p	$q\ (=1-p)$	1

$$E(X)=pa+qb=pa+(1-p)b$$

この簡単な等式は，後に重要な箇所で参照することになる。

［準備２］ a,b を定数とするとき，

（１）確率変数 X,Y に対して，平均 $E(X)$ の線形性より

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y), \quad E(aX+b)=aE(X)+b$$

となる。さらに　$V(aX+b)=a^2V(X)\cdots ②$

（２）互いに独立な確率変数 X,Y に対して

$$E(XY)=E(X)E(Y)\cdots ③$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)\cdots ④$$

［証明②，③，④］

$$V(aX+b)=E\left((aX+b)^2\right)-\left\{E(aX+b)\right\}^2=E\left(a^2X^2+2abX+b^2\right)-\left\{aE(X)+b\right\}^2$$

$$=a^2E\left(X^2\right)+2abE(X)+b^2-a^2\left\{E(X)\right\}^2-2abE(X)-b^2$$

$$=a^2\left(E\left(X^2\right)-\left\{E(X)\right\}^2\right)=a^2V(X)$$

$X=\{x_1,\cdots,x_n\},\ Y=\{y_1,\cdots,y_m\},\ P(x_i)=p_i\ (i=1,\cdots,n),\ P(y_j)=q_j\ (j=1,\cdots,m)$ とする。

$$E(XY)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(p_iq_j\cdot x_iy_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(q_jy_j\cdot p_ix_i\right)=\sum_{j=1}^{m}\left\{q_jy_j\sum_{i=1}^{n}\left(p_ix_i\right)\right\}=\sum_{j=1}^{m}\left\{q_jy_jE(X)\right\}$$

$$=E(X)\sum_{j=1}^{m}\left(q_jy_j\right)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=E\left((X+Y)^2\right)-\left\{E(X+Y)\right\}^2=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\left\{E(X)+E(Y)\right\}^2$$

$$=\left(E\left(X^2\right)+2E(XY)+E\left(Y^2\right)\right)-\left(\left\{E(X)\right\}^2+2E(X)E(Y)+\left\{E(Y)\right\}^2\right)$$

$$=\left(E\left(X^2\right)-\left\{E(X)\right\}^2\right)+\left(E\left(Y^2\right)-\left\{E(Y)\right\}^2\right)=V(X)+V(Y)$$

■

［準備３］確率変数とその平均の定義から明らか。説明の必要は無いだろう。

すべての x に対して $f(x)\geq g(x)$ ならば $E\left(f(X)\right)\geq E\left(g(X)\right)$ である。

特に，等号が成り立つ条件は，$P\left(f(X)=g(X)\right)=1$ である。

［定理１］

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 互いに独立な確率変数で，すべて同じ分布に従っているとする。つまり，

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=m\ \ (<\infty)$$

$$V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2\ \ (<\infty)$$

である。そして，

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)$$

とする。$\overline{X}$ を n 個の確率変数の平均であることを明示するため $\overline{X}=\overline{X}_{(n)}$ ともかく。

このとき，$E\left(\overline{X}_{(n)}\right)=m\cdots$⑤，$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}\cdots$⑥　である。

［証明⑤，⑥］

$$E\left(\overline{X}_{(n)}\right)=E\left(\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n}E\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\cdots+E\left(X_n\right)\right\}=\frac{1}{n}\left(m+m+\cdots+m\right)=\frac{nm}{n}=m$$

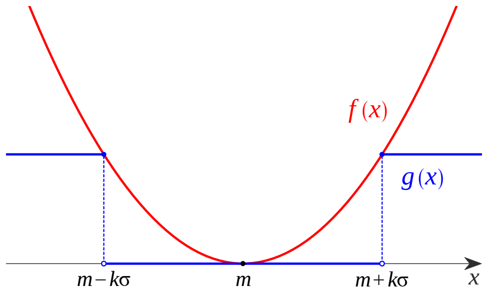
$$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=V\left(\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n^2}V\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{V\left(X_1\right)+V\left(X_2\right)+\cdots+V\left(X_n\right)\right\}=\frac{1}{n^2}\left(\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2\right)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n} \quad ■$$

［定理２］チェビシェフの不等式

確率変数 X の平均 m，標準偏差 σ に対して，任意の $k\left(>0\right)$ に対して，

$$P\left(\left|X-m\right|\geq k\sigma\right)\leq\frac{1}{k^2}\cdots ⑦$$



が成り立つ。

［証明⑦］

$$f\left(x\right)=\frac{1}{k^2}\left(x-m\right)^2,\quad g\left(x\right)=\begin{cases}\sigma^2 & \left(\left|x-m\right|\geq k\sigma\right)\\ 0 & \left(\left|x-m\right|<k\sigma\right)\end{cases}$$

とする。すべての x に対して $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ であり，準備３により次の不等式が得られる。

$$E\left(f\left(X\right)\right)\geq E\left(g\left(X\right)\right)\cdots ⑧$$

ところで⑧の左辺は次のようになる。

$$E\left(f\left(X\right)\right)=E\left(\frac{1}{k^2}\left(X-m\right)^2\right)=\frac{1}{k^2}E\left(\left(X-m\right)^2\right)=\frac{1}{k^2}V\left(X\right)=\frac{\sigma^2}{k^2}\cdots ⑨$$

また，$P\left(\left|X-m\right|\geq k\sigma\right)=p$ とおけば $P\left(\left|X-m\right|<k\sigma\right)=1-p$ であるので，$g\left(x\right)$ の定義よりその分布は次の様になっている。

X	σ^2	0	計
P	$p\left(=P\left(\left\|X-m\right\|\geq k\sigma\right)\right)$	$1-p\left(=P\left(\left\|X-m\right\|<k\sigma\right)\right)$	1

この確率分布の平均を求めると，⑧の右辺は次のようである。

$$E\left(g\left(X\right)\right)=p\cdot\sigma^2+\left(1-p\right)\cdot 0=p\sigma^2=\sigma^2P\left(\left|X-m\right|\geq k\sigma\right)\cdots ⑩$$

⑧に⑨と⑩を代入し，

$$\frac{\sigma^2}{k^2}\geq\sigma^2P\left(\left|X-m\right|\geq k\sigma\right)\quad よって\quad P\left(\left|X-m\right|\geq k\sigma\right)\leq\frac{1}{k^2} \quad ■$$

［定理３］大数の法則

任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，$n\to\infty$ のとき $P\left(\left|\overline{X}-m\right|\geq\varepsilon\right)\to 0$ …⑪

［証明⑪］

任意の ε に対し $k=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ とおく。この k に対してチェビシェフの不等式⑦は成り立つ。

さて，上記と同様に $\dfrac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=\overline{X}=\overline{X}_{(n)}$ とすると，

$$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

であるので⑨と⑩は，

$$E\left(f\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right)=\frac{1}{k^2}V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\frac{\sigma^2}{nk^2}$$

$$E\left(g\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right)=\sigma^2P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\geq k\sigma\right)$$

であるから，

$$\frac{\sigma^2}{nk^2}=E\left(f\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right)\geq E\left(g\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right)=\sigma^2P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\geq k\sigma\right)$$

両辺を σ^2 で割り，

$$P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\geq k\sigma\right)\leq\frac{1}{nk^2}\cdots ⑫$$

を得る。ところで $k\sigma=\varepsilon$，$\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ であるので⑫に代入すると，

$$P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$n\to\infty$ とすると $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\dfrac{1}{n}\to 0$ となるので，

$$n\to\infty \text{ のとき } P\left(\left|\overline{X}-m\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\geq\varepsilon\right)\to 0$$

■

※（注意）全体を通して，平均や分散が有限な値で存在している事を前提としている。

［参考文献］竹内　啓著「数理統計学」東洋経済新報社　昭和３８年（1963）

堀部和経　2022/06/10