

マルコフの不等式 と チェビシェフの不等式

・チェビシェフの不等式の証明をマルコフの不等式から**簡単**に証明しよう。
但し、この**簡単**は、短い証明という意味である。理解しやすいかどうかは？！

[マルコフの不等式] Markov's inequality

非負の確率変数 X と任意の正の数 α に対して次の不等式が成立する。

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X) \quad (\text{但し, } E(X) \text{ の存在は仮定})$$

[証明] 連続でも離散でも同様なので、ここでは連続の場合で示す

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\alpha} x f(x) dx + \int_{\alpha}^{\infty} x f(x) dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{\infty} x f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} \alpha f(x) dx = \alpha \int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx = \alpha P(X \geq \alpha) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[補足] 離散の場合は、「積分」を「総和」に変える事で示される。

[チェビシェフの不等式] Chebyshev's inequality

確率変数 X の平均 $E(X) = m$, 標準偏差 $\sqrt{V(X)} = \sigma$ と任意の $k (> 0)$ に対して,

$$P(|X - m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。

[証明]

確率変数 $Y = |X - m|^2$ は非負の確率変数である。また $(k\sigma)^2 = \alpha$ とおく。

マルコフの不等式により $P(Y \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Y)$ である。

$$\begin{aligned} P(|X - m| \geq k\sigma) &= P(|X - m|^2 \geq (k\sigma)^2) = P(Y \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Y) \\ &= \frac{1}{(k\sigma)^2} E(|X - m|^2) = \frac{1}{(k\sigma)^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$