チェビシェフの不等式(2通りの証明)と大数の法則　(高校生に向けて)

[記号] 一般的な記号は既知とするが、確認のために次を記す。

事象Aの起こる確率$P(A)$,　確率変数X

平均(期待値) $m=E(X)$,　分散$\sigma^2=V(X)$,　標準偏差$\sigma=\sqrt{V(X)}$

[前提] 平均や分散は有限な値で存在している事を前提とする。

[準備1] 確率分布が右の場合

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$P(x_i)=p_i\ \ (i=1,2,\cdots,n),\ \ \sum_{i=1}^{n}p_i=1,\ \ m=E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$

$$V(X)=E\left((X-m)^2\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-m)^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

[準備2] 確率変数X,Yに対し(但し, a,bは定数とする)

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y),\ \ E(aX+b)=aE(X)+b,\ \ V(aX+b)=a^2V(X)$$

さらに, 確率変数X,Yが独立な場合

$$E(XY)=E(X)E(Y),\qquad V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

[準備3] すべてのxに対して$f(x)\geq g(x)$ならば　$E(f(X))\geq E(g(X))$　である。

特に, 等号が成り立つ条件は, $P(f(X)=g(X))=1$である。

[定理1] $X_1,X_2,\cdots,X_n$を, すべて同じ分布に従っている互いに独立な確率変数, つまり

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=m\ (<\infty),\ \ V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2\ \ (<\infty)$$

とする。

そして, $\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\overline{X}_{(n)}$とおく。ここで$\overline{X}$をわざわざ, $\overline{X}_{(n)}$と表記したのは, n個の確率変数の平均であることを明示するためである。

このとき, $E\left(\overline{X}_{(n)}\right)=m$, $V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$となる。

[証明]

$$E\left(\overline{X}_{(n)}\right)=E\left(\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n}E\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\cdots+E\left(X_n\right)\right\}=\frac{1}{n}\left(m+m+\cdots+m\right)=\frac{nm}{n}=m$$

$$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=V\left(\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)\right)=\frac{1}{n^2}V\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)$$

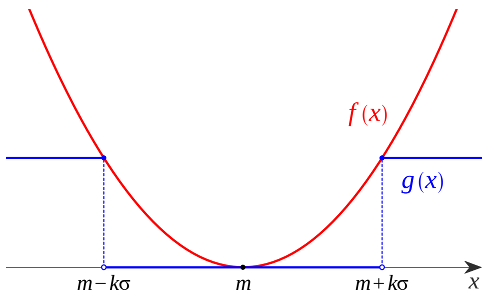
$$=\frac{1}{n^2}\left\{V\left(X_1\right)+V\left(X_2\right)+\cdots+V\left(X_n\right)\right\}=\frac{1}{n^2}\left(\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2\right)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n} \quad \blacksquare$$

[定理2] チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

確率変数 X の平均 m, 標準偏差 σ に対して，任意の $k(>0)$ に対して，

$$P\left(\ |X-m|\geq k\sigma\ \right)\leq\frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。



[証明]

$$f(x)=\frac{1}{k^2}(x-m)^2,\quad g(x)=\begin{cases}\sigma^2 & \left(|x-m|\geq k\sigma\right)\\ 0 & \left(|x-m|<k\sigma\right)\end{cases}$$

とする。すべての x に対して $f(x)\geq g(x)$ であるので，次の不等式を得る。

$$E\left(f(X)\right)\geq E\left(g(X)\right)\cdots\cdots\ (※)$$

(※)の左辺： $E\left(f(X)\right)=E\left(\frac{1}{k^2}(X-m)^2\right)=\frac{1}{k^2}E\left((X-m)^2\right)=\frac{1}{k^2}V(X)=\frac{\sigma^2}{k^2}$

また， $P\left(|X-m|\geq k\sigma\right)=p$ とおけば $P\left(|X-m|<k\sigma\right)=1-p$。 $g(X)$ の分布は次となるので，

$g(X)$	σ^2	0	計
P	$p=P\left(\|X-m\|\geq k\sigma\right)$	$1-p=P\left(\|X-m\|<k\sigma\right)$	1

(※)の右辺： $E\left(g(X)\right)=p\cdot\sigma^2+(1-p)\cdot 0=p\sigma^2=\sigma^2P\left(|X-m|\geq k\sigma\right)$

となり，両辺を σ^2 で割れば，次を得る。

$$P\left(|X-m|\geq k\sigma\right)\leq\frac{1}{k^2} \quad \blacksquare$$

［定理３］ 大数の法則 Low of Large Numbers

任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，$n\to\infty$ のとき $P\left(\left|\overline{X}-m\right|\ge\varepsilon\right)\to 0$

［証明］

任意の ε に対し $k=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ とおく。この k に対してチェビシェフの不等式は成り立つ。

さて，上記と同様に $\dfrac{1}{n}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=\overline{X}=\overline{X}_{(n)}$ とすると，

$$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

であるので $\langle\alpha\rangle$ の左辺と右辺は，

$\langle\alpha\rangle$ の左辺： $E\left(f\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right)=\dfrac{1}{k^2}V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\dfrac{\sigma^2}{nk^2}$

$\langle\alpha\rangle$ の右辺： $E\left(g\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right)=\sigma^2P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\ge k\sigma\right)$

であるから，

$$\frac{\sigma^2}{nk^2}\ge\sigma^2P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\ge k\sigma\right)$$

両辺を σ^2 で割り，左右を入れ替え，

$$P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\ge k\sigma\right)\le\frac{1}{nk^2}$$

を得る。ところで $k\sigma=\varepsilon$，$\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ であるので，この不等式に代入すると，

$$P\left(\left|\overline{X}_{(n)}-m\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}$$

いま $n\to\infty$ とすると $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\dfrac{1}{n}\to 0$ となるので，

任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，$n\to\infty$ のとき $P\left(\left|\overline{X}-m\right|\ge\varepsilon\right)\to 0$ となる。 ■

ここまでで,チェビシェフの不等式と大数の法則を示した。

以下,別の手法でチェビシェフの不等式を示す。

[準備4] 連続型確率分布関数 $p(x)$に対する確率について,

$a \le X \le b$である確率は, $P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)dx$である。

[定理4] マルコフの不等式 Markov's inequality

非負の確率変数 Xと任意の正の数 αに対して,次の不等式が成立する。

$$P(X \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha}E(X)$$

[証明] 連続でも離散でも同様であるが, ここでは連続の場合で示す

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)dx = \int_0^{\infty} x\,p(x)dx = \int_0^{\alpha} x\,p(x)dx + \int_{\alpha}^{\infty} x\,p(x)dx$$

$$\ge \int_{\alpha}^{\infty} x\,p(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\infty} \alpha\,p(x)dx = \alpha\int_{\alpha}^{\infty} p(x)dx = \alpha P(X \ge \alpha) \quad \blacksquare$$

[補足] if $x \ge \alpha(>0) \Rightarrow xp(x) \ge \alpha\,p(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\infty} x\,p(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\infty} \alpha\,p(x)dx$

[定理5] チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

確率変数 Xの平均 m, 標準偏差 σと,任意の $k(>0)$に対して, 次が成り立つ。

$$P(|X-m| \ge k\sigma) \le \frac{1}{k^2}$$

[証明]

確率変数 $Y = |x-m|^2$は非負の確率変数である。また $(k\sigma)^2 = \alpha$とおく。

マルコフの不等式により $P(Y \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha}E(Y)$である。

$$P(|X-m| \ge k\sigma) = P\left(|X-m|^2 \ge (k\sigma)^2\right) = P(Y \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha}E(Y)$$

$$= \frac{1}{(k\sigma)^2}E\left(|X-m|^2\right) = \frac{1}{k^2\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2} \quad \blacksquare$$

[参考文献] 竹内 啓 著「数理統計学」東洋経済新報社(1963)
東京大学教養部統計教室 編「統計学入門」東京大学出版部(1991)

堀部和経 2022/07/20