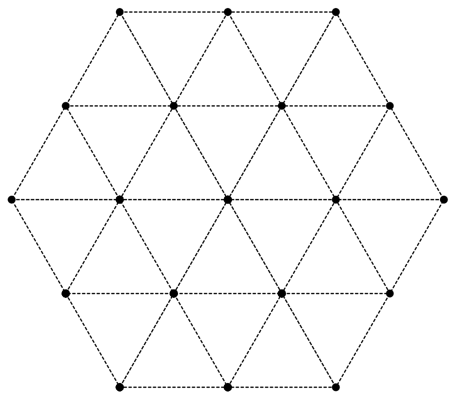
【問題】

右の図のように１辺の長さ１の正三角形格子状に配置された19 個の点について，次の各問に答えよ。

（１）この 19 個の点の中の異なる２点を結ぶ線分を考える。このとき線分の長さは何通りあるか。



（２）この 19 個の点の中から３点を選び正三角形を作る。大きさの異なる正三角形は何種類あるか。

（３）この 19 個の点の中の３点を選び正三角形を作る。このとき正三角形は全部で何個できるか。
（大きさ，位置が異なる正三角形は区別する。）

（４）この 19 個の点の中の３点を選び三角形を作る。このとき三角形は全部で何個できるか。
（形，大きさ，位置が異なる三角形は区別する。）

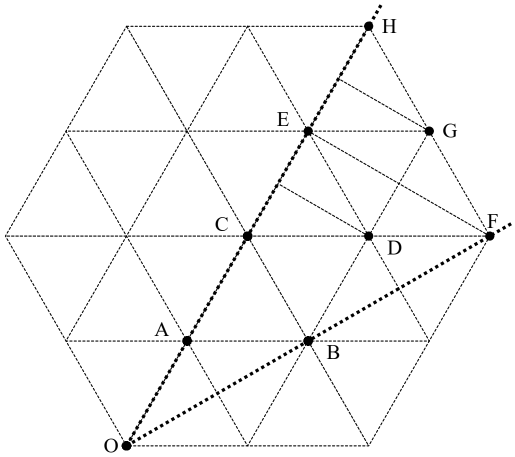
（５）この 19 個の点から６点を選んで正六角形を作る。このとき正６角形は何個できるか。
（大きさ，位置が異なる正六角形は区別する。）

【解答編】

（１）この 19 個の点の中から，異なる 2 点を結ぶ線分を考える。このとき線分の長さは何通りあるか。

［解］

正三角形格子状に配置された点なので，その対称性から点 O を基準点に設定したとき，2 つの半直線 OH と OF の間の点 A から H とを結ぶ線分を考えればよい。




$$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=\sqrt{3},\ \mathrm{OC}=2,\ \mathrm{OD}=\sqrt{7},$$

$$\mathrm{OE}=3,\ \mathrm{OF}=2\sqrt{3},\ \mathrm{OG}=\sqrt{13},\ \mathrm{OD}=4$$

である。

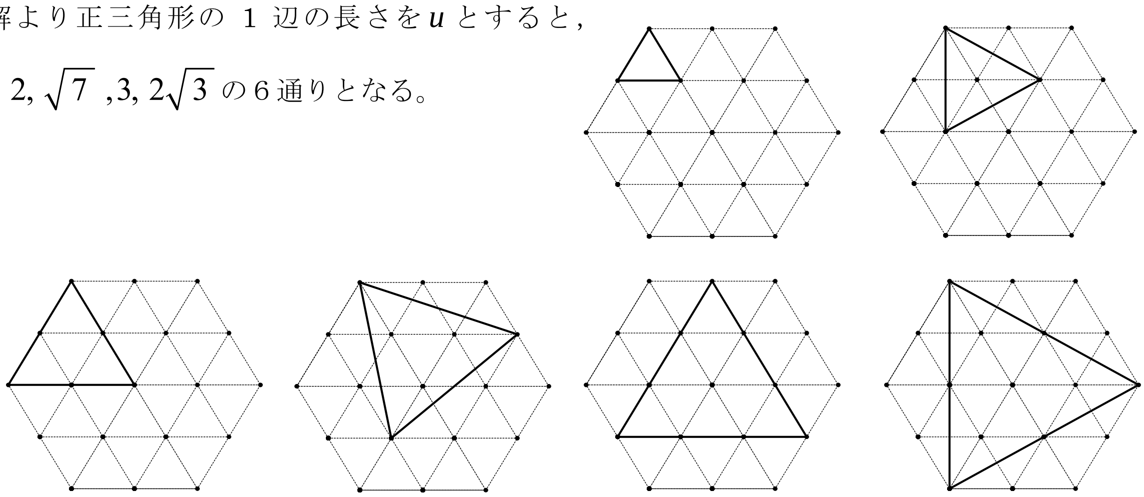
これらの長さはすべて異なるので，長さは８通りある。

（２）この 19 個の点の中の３点を選び正三角形を作る。大きさの異なる正三角形は何種類あるか。

［解］

（１）の解より正三角形の 1 辺の長さを $u$ とすると，

$u=1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{7}, 3, 2\sqrt{3}$ の６通りとなる。



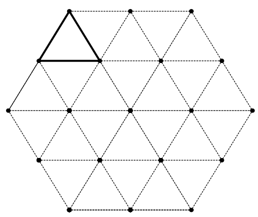
（３）この 19 個の点の中の３点を選び正三角形を作る。このとき全部で何個できるか。

（大きさ，位置が異なる正三角形は区別する。）

［解］

正三角形の辺の長さで分類し，個数 $k$ を数える。

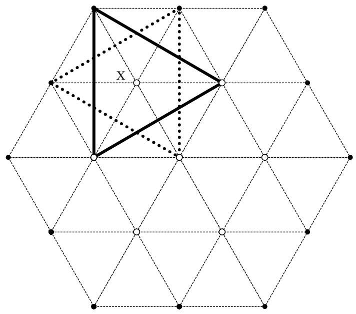
・$u=1$ の場合



正三角形の配置は上下対称となっている。上半分を１段目，２段目と分で考えると，正三角形は１段目 5 個，２段目 7 個であるから，

$$k=2\times(5+7)=24\text{ 個}$$

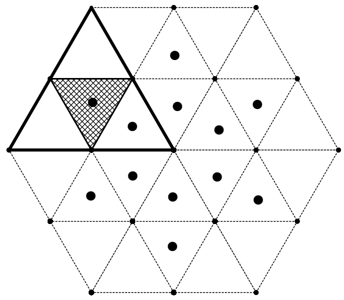
・$u=\sqrt{3}$ の場合




２つの正三角形（$u=\sqrt{3}$，実線と破線）の中心 X となりうる点は，7 個の点(白丸)のであるから，

$$k=2\times 7=14 \text{ 個}$$

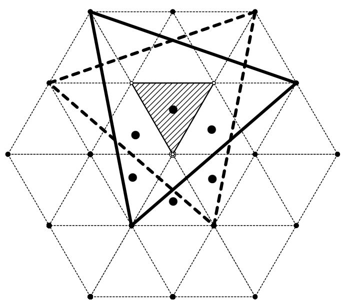
・$u=2$ の場合



正三角形($u=2$)とその中の小正三角形($u=1$，網目)は，1 : 1 に対応している。小三角形（$u=1$）となりうるものは「黒丸」を付けた内側 6 個と外側 6 個あるから，

$$k=2\times 6=12 \text{ 個}$$

・$u=\sqrt{7}$ の場合

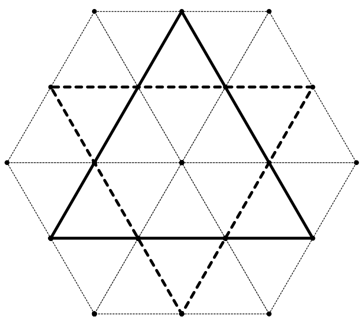


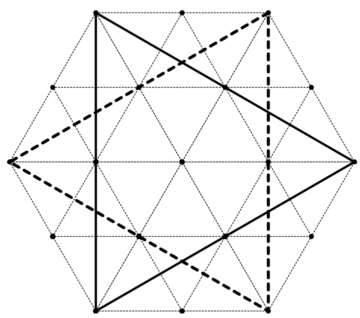
2 つの正三角形($u=\sqrt{7}$，実線と破線)の中央にある小三角形($u=1$，網目)になりうる小三角形は，6 個あるから，

$$k=2\times 6=12 \text{ 個}$$

・$u=3,\ 2\sqrt{3}$ の 2 つの場合はどちらも実線と破線の正三角形 2 個あるから，

共に $k=2$ である。





以上，まとめると，

$$k=24+14+12+12+2+2=66 \text{ 個}$$

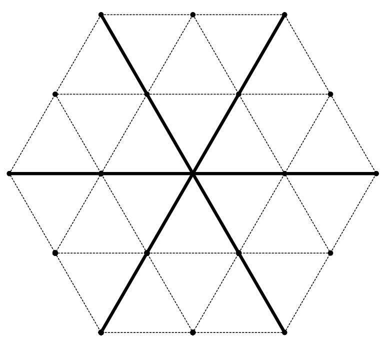
となる。

（４）この 19 個の点の中の 3 点を選び三角形を作る。このとき三角形は全部で何個できるか。
（形，大きさ，位置が異なる三角形は区別する。）

［解］

１９個の点から３点を任意に選ぶ場合の数は，${}_{19}C_3=\dfrac{19\cdot 18\cdot 17}{3\cdot 2\cdot 1}=969$ 通りである。

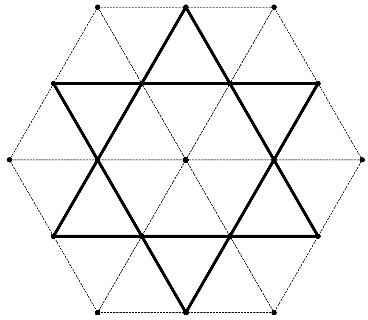
ここから，3 点が同一直線上に並ぶ場合を除外すれば良い。
除外する場合を一直線上に並ぶ点の個数（3～5 個）で分類して考察する。



(1) 5 点が一直線上に並ぶ場合は３通りある。

その各々に対して，${}_5C_3=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}=10$ 通りあるから，

$$3\times {}_5C_3=3\times 10=30 \text{ 通り}$$

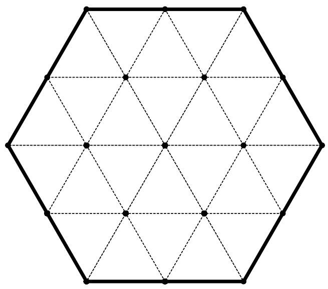


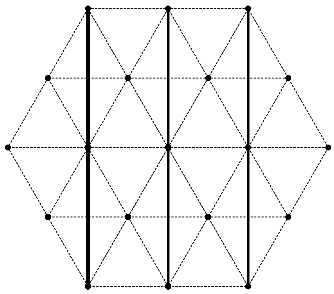
(2) 5 点は並ばないが，4 点が一直線上に並ぶ場合は 6 通りある。

その各々に対して，${}_4C_3=\dfrac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}=4$ 通りであるから，

$$6\times{}_4C_3=6\times4=24 \text{通り}$$

(3) 5 点や 4 点は並ばないが，3 点が一直線上に並ぶ場合について考える。
まずその 3 点の並び方を分類する。
(3 - 1) 3 点が均等に距離 1 で並んでいる場合は，6 通りある。（下左図）





(3 - 2) 3 点が均等に距離 $\sqrt{3}$ で並んでいる場合は，鉛直に並行なものは 3 通りある。（上右図）

同様に右上がり,左上がりのもそれぞれ 3 通りあり，合計 9 通りである。
(3 - 3)上記(3 -1,3 - 2)以外に等間隔でない場合も含めても，3 点が一直線上に並ぶ場合はない。
以上，まとめて $6+9=15$ 通りであるから，

$$15\times{}_3C_3=15\times1=15 \text{通り}$$

以上すべてまとめて, 19 個の点から 3 点を選んでできる三角形は全部で,

$$969-(30+24+15)=969-69=900 \text{個}$$

（5）この 19 個の点から 6 点を選んで正六角形を作る。このとき正六角形は何個できるか。
［解］
元々の図形が辺長 2 の正六角形であるから，6 点を選んでできる正六角形の辺長 $u\le2$ である。

よって，考えられる場合は，$u=1,\ \sqrt{3},\ 2$ の 3 通りである。

正六角形$(u=1)$の中心 Y として 7 個の点（白丸）が考えられる。（下左図）。

また，$u=\sqrt{3},\ 2$ の正六角形は，明らかにそれぞれ 1 個である。（下右図，実践と破線）

よって，$7+2=9$ 個