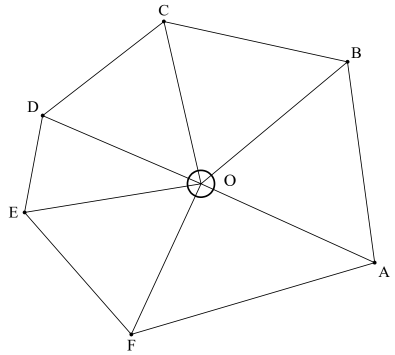
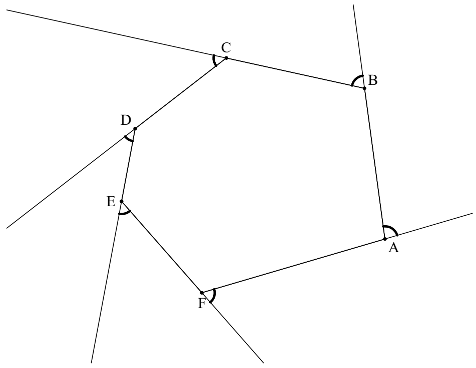
デカルトの定理　　多面体の不足角の総和について

1　多角形の内角の和・外角の和





（1） n 角形の内角の和

内部に点 O をとり各頂点と線分で結ぶ．三角形が n 個できる．また，中央に 1 周分 $360°$ があるので，（上図左参照）

$$(\text{内角の和}) = 180n - 360 = (n-2)180$$ ・・・（A）　【注】角度の記号「 ° 」は省略する事がある．

（2） n 角形の外角の和

$$(\text{外角の和}) = 360$$

は明らかとしても良いが，ここでは次の説明をしよう．

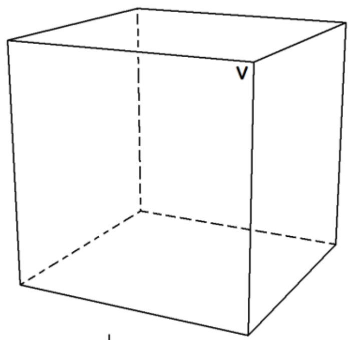
頂点は n 個であり，そのひとつの頂点には内角と外角合わせて $180°$ ある．そこから内角の和を引いて，（上図右参照）

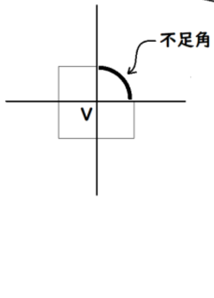
$$(\text{外角の和}) = 180n - (180n - 360) = 360$$

となる．

2　多面体の不足角とは？

不足角とはなんであるか，例をあげて説明する．





（例１）立方体の各面は，正方形であり，その正方形の内角は，$90°$ である．ひとつの頂点に正方形は，３つ集まっている．したがって，$90 \times 3 = 270°$ となる．これと，1 周の $360°$ との差，つまり，

$$360 - 270 = 90°$$

を，この頂点の不足角という．

頂点の数が 8 個であるから，この不足角をすべて合計すると，

$$90 \times 8 = 720°$$

である．

（例２）正三角柱の側面は長方形で，ふたつの底面は正三角形である．この場合，ひとつの頂点の不足角は，

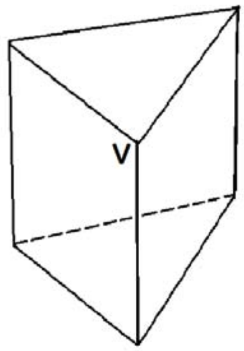
$$360-(90\times2+60)=120°$$

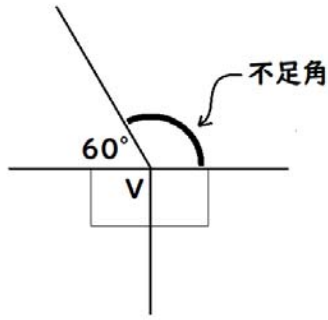
となる．

頂点の数は，６個であるから，不足角の合計は，

$$120\times6=720°$$

である．



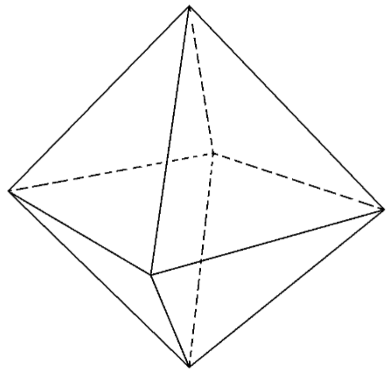


（例３）正八面体の各面は，正三角形である．この場合，

［ひとつの頂点の不足角］＝

［頂点の数］＝

［不足角の合計］＝



（例４）自分で考えた多面体について考えてみよう．

［ひとつの頂点の不足角］＝

［頂点の数］＝

［不足角の合計］＝

（↑：自分で考えた多面体の図）

以上の例では，すべて多面体の不足角の総和は，720°となっている．（例４も含めて・？）

『すべての多面体の不足角の総和は，720°である．』と言えるのだろうか？

3　デカルトの定理

多面体の不足角の総和は，720°である。

以下，この定理の説明を順序よく説明し，証明しよう．

4 オイラーの多面体定理

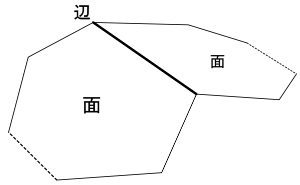
多面体の頂点数，辺数，面数をそれぞれv, e, f とすると，次が成り立つ.

$$v-e+f=2$$

5 使用する記号の説明

多面体の面は，3角形からN角形までで構成されているとする．そして，n角形の個数をf_nと表すことにする.

$$f=f_3+f_4+f_5+\cdots+f_N \quad \cdots \quad (\text{B})$$



となる．また，２つの面の間に辺が１つ存在するから，

$$e=\frac{1}{2}\left(3f_3+4f_4+5f_5+\cdots+Nf_N\right) \quad \cdots \quad (\text{C})$$

となる．頂点はv個あるので，すべての頂点に，1からvまでの番号を付ける.

6 各頂点に集まる角について

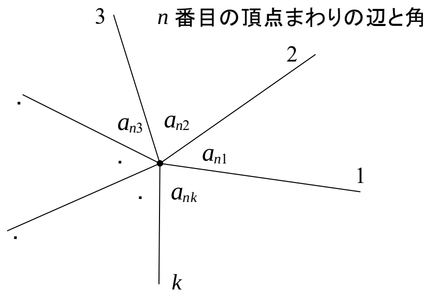
n番目の頂点に辺がk本集まっているとする.

この頂点には（多面体の異なる面の）k個の内角が集まっている.

その角を右の図の様に，

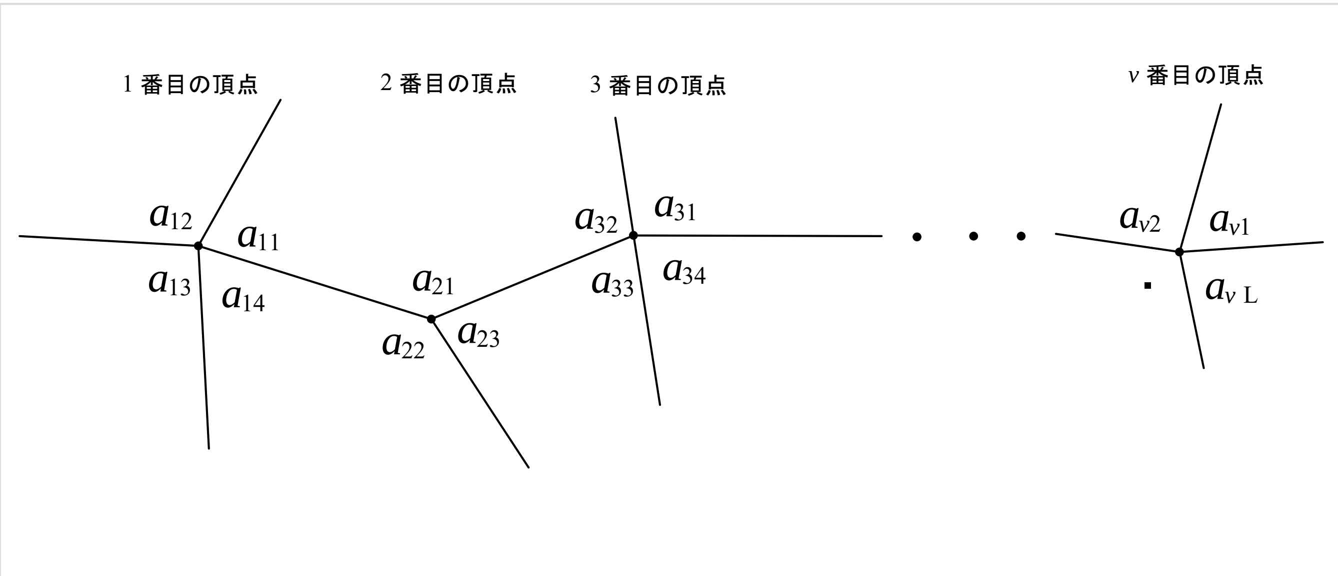
$$a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3},\ \cdots,\ a_{nk}$$

と表すことにする.



頂点は，１番からv番まであるので，

それら全体をイメージした図は下である.



多面体の頂点まわりの内角に着目したイメージ図

（注意）ここで言う「内角」とは，多面体を構成している面の多角形の内角のことである.

各頂点とそのまわりの内角の関係を一覧表にする.

頂点（$1,\cdots,v$）	各頂点まわりの内角	各頂点における不足角（D）
１番目	$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}$	$360-(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})$
２番目	$a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$	$360-(a_{21}+a_{22}+a_{23})$
３番目	$a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34}$	$360-(a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34})$
:	:	:
v番目	$a_{v1},\ a_{v2},\ \cdots,\ a_{vL}$	$360-(a_{v1}+a_{v2}+\cdots+a_{vL})$

7　多面体の不足角の総和

不足角の総和Ｓは，上の表の（D）欄を縦にすべて足せばよいから，

$$\begin{aligned}\mathrm{S}&=360v-\left\{(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})+(a_{21}+a_{22}+a_{23})+\cdots+(a_{v1}+a_{v2}+\cdots+a_{vL})\right\}\\&=360v-(\text{すべての内角}a_{ij}\text{の和})\\&=360v-\left\{\underline{(3\text{角形の内角}a_{ij}\text{の和})+\cdots+(N\text{角形の内角}a_{ij}\text{の和})}\right\}\end{aligned}$$

となる．以下この計算を丁寧に説明する．

縦の行は全部でv行あるので第１項は$360v$となる．

第２項について第１行の式は，内角a_{ij}を上から順に，つまり頂点別で足している．

第２行の式は，すべての内角a_{ij}を足して，それを第１項$360v$から引いている．

第３行目の式は，すべての内角a_{ij}の足す順序を変えて足している．その順序とは，内角a_{ij}の属している多角形の角数$n\left(n=3,4,\cdots,N\right)$別に分類し直して足している．

つまり，内角a_{ij}をすべて足していることに変わりは無い．

さて，ここから（A）を利用しアンダーライン（UL）の部分の計算をする．

$$\begin{aligned}\mathrm{UL}&=\left(3\text{角形の内角の和}\right)+\left(4\text{角形の内角の和}\right)+\cdots+\left(N\text{角形の内角の和}\right)\\&=\left(3-2\right)180f_3+\left(4-2\right)180f_4+\cdots+\left(N-2\right)180f_N\\&=180\left(3f_3+4f_4+\cdots+Nf_N\right)-360\left(f_3+f_4+\cdots+f_N\right)\end{aligned}$$

ここで（A），（B）を代入し，

$$\mathrm{UL}=180\cdot 2e-360f=360e-360f$$

となる．したがって不足角の総和Ｓは，次の値を得る．

$$\mathrm{S}=360v-\left(360e-360f\right)=360\left(v-e+f\right)=360\times 2=720$$ ■