標準正規分布曲線について（高校生に向けて）

堀部　和経

堀部数学模型研究所代表，大同大学・愛知県立春日井東高等学校・ＮＳＭ&Ｄ非常勤講師

２０２０／９／１８

［証明の手順および定理について］

４つの Lemma を証明し、最後に Theorem『標準正規分布曲線と x 軸の間の面積は１』を示す。

［Lemma 1］　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$　・・・①　：　Wallis' product

［Proof］　$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおく。

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n-1}x\,dx=\left[-\cos x\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2}x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=(n-1)S_{n-2}-(n-1)S_n$$

したがって、$nS_n=(n-1)S_{n-2}$ となるので、$S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$　・・・②　を得る。よって、

$$S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_0$$

$$S_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot S_1$$

ところで、$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1,\quad S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot1\cdot\frac{2}{\pi}$$

である。

さて、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$0<\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$ である。$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ であったので、

$$0<S_{2n+1}<S_{2n}<S_{2n-1}$$

を得る。これと、②の結果から、

$$1<\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}<\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}}=\frac{S_{2n-1}}{\frac{2n}{2n+1}S_{2n-1}}=\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}$$

ここで、$n\to\infty$ とすると $1<\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}<1+\frac{1}{2n}\to 1$ となり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}=1\ ・・・③$$

を得る。ゆえに、①は示された。 ■

［Lemma 2］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\ {}_{2n}C_n}=\sqrt{\pi}$ ・・・④

［Proof］ $S_{2n}S_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ であった。この両辺の正の平方根をとり $\sqrt{n}$ を掛けると、

$$\sqrt{n}\,S_{2n+1}\sqrt{\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}}=\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を得る。ところで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$ であるから⑤より、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,S_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ・・・⑤$$

を得る。さて、$S_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ の分子の因子すべてを、分母・分子に掛けると、

$$S_{2n+1}=\frac{(2n)^2(2n-2)^2\cdot\ \cdots\ \cdot 4^2\cdot 2^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

$$=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n+1)(2n)!}$$

$$=\frac{2^{2n}}{(2n+1)\,{}_{2n}C_n}\ ・・・⑥ \qquad \left(\because\ {}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$$

したがって、⑤と⑥より、

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{n}\,S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}\,2^{2n}}{(2n+1)\,{}_{2n}C_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot 2^{2n}}{(2n+1)\sqrt{n}\ {}_{2n}C_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\ {}_{2n}C_n}$$

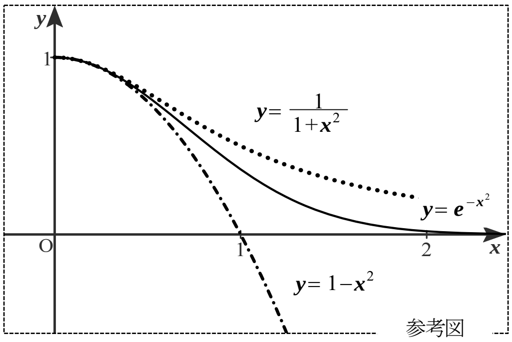
となり、④を得た。 ■

[Lemma 3]　$1-x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$　$(x>0)$ ・・・⑦

[Proof]　$F(x)=e^{-x^2}-(1-x^2)$ とおくと、であり、

$$F'(x)=-2xe^{-x^2}+2x=2x\left(1-e^{-x^2}\right)=2x\frac{e^{x^2}-1}{e^{x^2}}>0$$

ゆえに、$F(x)>0$ となる。



次に、$e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1+x^2 < e^{x^2}$ であるので、

$G(x)=e^{x^2}-(1+x^2)$ とおくと、$G(0)=e^0-1=0$ であり、

$$G'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)>0$$

ゆえに、$G(x)>0$ となり、⑦は示された。　■

[Lemma 4]　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ・・・⑧

[Proof]　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=I$ とおく。

今、$0<x<\infty$ で考えているので、⑦を利用することで、次の⑨が成り立つ。

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx<\int_0^\infty e^{-nx^2}dx<\int_0^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}\quad\cdots⑨$$

まず、$x=\cos\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta,\ 1-x^2=\sin^2\theta$ で、$x:0\to1$ のとき $\theta:\dfrac{\pi}{2}\to0$ なので、

$$(左辺)=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^{2n}\theta\left(-\sin\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta=S_{2n+1}$$

$x=\dfrac{1}{\tan\theta}$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{1}{\sin^2\theta},\ \dfrac{1}{1+x^2}=\sin^2\theta$ で、$x:0\to\infty$ のとき $\theta:\dfrac{\pi}{2}\to0$ なので、

$$(右辺)=\int_0^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^{2n}\theta\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}\theta\,d\theta=S_{2n-2}$$

さらに $\sqrt{n}\,x=t$ とおくと、$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ nx^2=t^2$ となり、$x:0\to\infty$ のとき $t:0\to\infty$ なので、

（中辺）$=\int_0^{\infty} e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{n}}I$

となる。⑨の不等式に代入し、$S_{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{n}}I<S_{2n-2}$ となる。したがって、

$$\sqrt{n}\,S_{2n+1}<I<\sqrt{n}\,S_{2n-2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑩$$

を得る。ところで③より、$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}=1$ であった。

また③より、$S_n=\frac{n-1}{n}S_{n-2}$ なので、$S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}S_{2n-2}$ つまり、$S_{2n-2}=\frac{2n}{2n-1}S_{2n}$ を利用し、

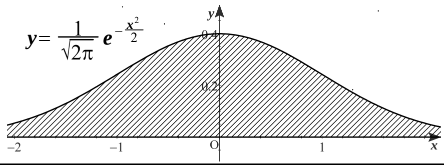
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n+1}}{S_{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)S_{2n+1}}{2n\,S_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}=1$$

を得る。今⑥より、$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,S_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であるから、$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,S_{2n-2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を得る。

したがって⑩より $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が示された。　■

［Theorem］標準正規分布曲線と x 軸との間の面積

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1 \quad \cdot\cdot\cdot ⑪$$



［証明］　⑪の左辺の積分で、$x=\sqrt{2}\,u$ と置換すると、$\frac{dx}{du}=\sqrt{2}$ であり、$x:-\infty\to\infty$ のとき

$u:-\infty\to\infty$ なので、

（左辺）$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\,e^{-\frac{(\sqrt{2}u)^2}{2}}du$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du$$

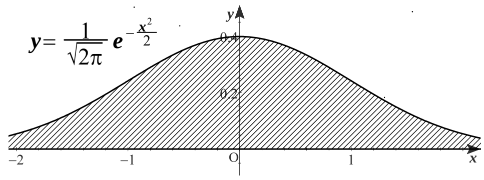
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$　■

［参考文献］　小針晛宏著「確率・統計入門」岩波書店（1973）

Reference

［Th］　標準正規分布曲線と x 軸との間の面積

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1\ \cdot\cdot\cdot\ ①$$



［Lem］

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ のとき、$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ である。

［Proof］　Jacobian determinant　J を用いて $dx\,dy=J\,dr\,d\theta$ となるが、実際

$\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta,\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta}=r\cos\theta$ であるから、

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r \qquad ■$$

［Proof of Th］ $I=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$ とおくと、

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dx\,dy=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=I^2$$

ここで、$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と変数変換する。

領域 $D=\left\{(x,\ y)\mid 0\le x<\infty,\ 0\le x<\infty\right\}=\left\{(r,\ \theta)\mid 0\le r<\infty,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$ であり、補助定理から $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$。また $x^2+y^2=r^2$ であるので、

$$I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\ dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}2r\,e^{-r^2}\ dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-e^{-r^2}\right]_0^{\infty}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\,\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$　　よって $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる。

①　の左辺で、$x=\sqrt{2}\,u$ と置換する。$\dfrac{dx}{du}=\sqrt{2}$ であり、$x:-\infty\to\infty$ のとき $u:-\infty\to\infty$ なので、

$$（左辺）=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\,e^{-\frac{(\sqrt{2}u)^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}I=1 \qquad ■$$