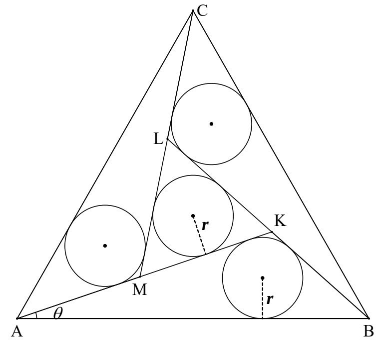
巴（ともえ）形の円の配列

堀部和経　2019/6/7

［問１］

１辺の長さが１の正三角形 ABC の内部に３点 K,L,M があり，３つの三角形△ABK, △BCL, △CAM すべて合同であるという。このとき明らかに，三角形 KLM は正三角形であり，その内接円と，合同な３つの三角形の内接円の半径がすべて r であるという。

このとき，r の値を決定せよ。

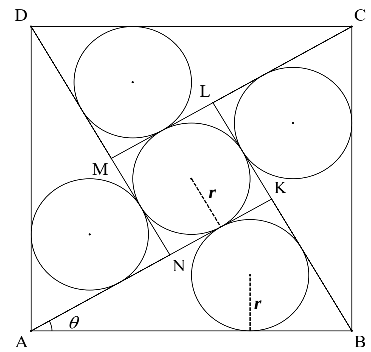


【問１・２・３すべての補足，内部の点 K,・・・は，それぞれ隣の三角形の辺上にあるとする。】

［問２］

１辺の長さが１の正方形 ABCD の内部に４点 K,L,M,N があり，４つの三角形△ABK, △BCL, △CDM, △DAN がすべて合同であるという。このとき明らかに，四角形 KLMN は正方形であるから内接円は存在する。その内接円の半径と，合同な４つの三角形の内接円の半径は，すべて r であるという。

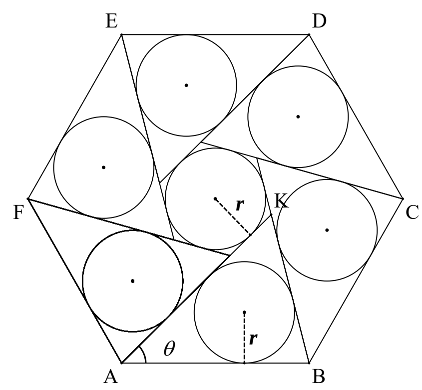
このとき，r の値を決定せよ。



［問３］

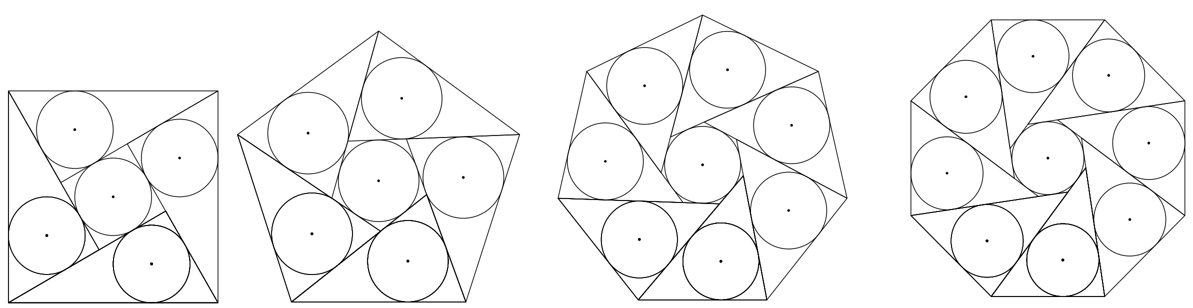
１辺の長さが１の正６角形 ABCDEF 内に６個の点 K,L,M,N,O,P をとり，その点と６本の辺からできる６個の三角形がすべて合同となるようにする。このとき，中央部に出来る正６角形の内接円の半径と，６個の合同な三角形の内接円の半径は，すべて r であるという。

このとき，r の値を決定せよ。



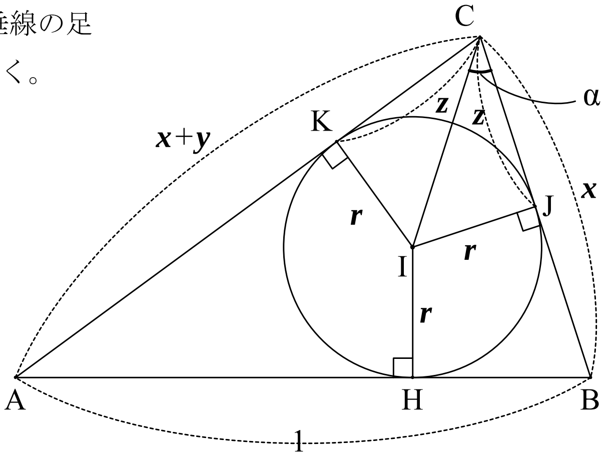
【注意，点 K 以下の点を図では省略している。】

（参考図）



（準備）

$AB=1$，$BC=x$，$CA=x+y\ (x>0,\ y>0)$ の△ABC と，その内接円 I を考察する。



内接円の半径を r とし，内心 I から各辺に下ろした垂線の足を H,J,K とする。また，$CJ=CK=z$，$\angle ICJ=\alpha$ とおく。

このとき，△ABC の面積 S は，

$$S=(1+z)r=\left(1+\frac{r}{t}\right)r$$

である。（ただし，$\tan\alpha=t$ と略記した。）

（証明）

△ICK において，

$$r=z\tan\alpha \qquad \therefore\quad z=\frac{r}{t}$$

$$AK=AH,\ BH=BJ,\ CJ=CK,\ AK+BJ=AB=1$$

であるから，

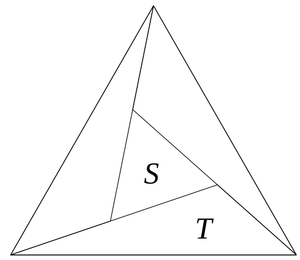
$$(x+y-z)+(x-z)=1 \qquad \therefore\quad 2x+y=1+2z$$

ところで，

$$S=\frac{1}{2}\{1+x+(x+y)\}r=\frac{1}{2}(1+1+2z)r=(1+z)r=\left(1+\frac{r}{t}\right)r$$

■

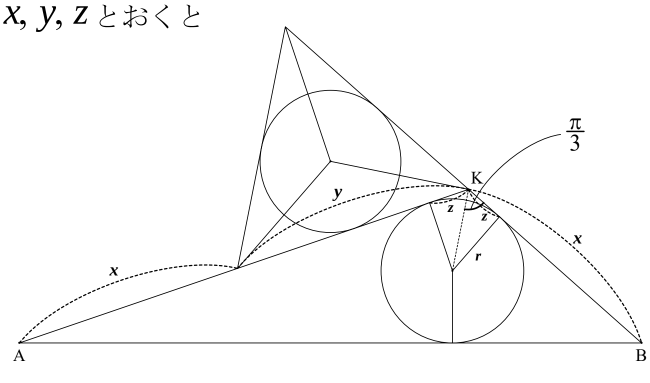
（解答・問１）



中央の正三角形の面積を S，３つの合同な三角形の面積を T とする。
また，△ABC は一辺が１の正三角形であるから，

$$S+3T=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。右の拡大図において，３つの線分の長さを x, y, z とおくと



$$y=2\sqrt{3}\,r, \qquad z=\frac{r}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

である。そして，

$$S=\frac{1}{2}(y+y+y)r=\frac{3yr}{2}=3\sqrt{3}\,r^2$$

$$T=(1+z)r=\left(1+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)r=\frac{\sqrt{3}}{3}r^2+r$$

であるから，

$$3\sqrt{3}\,r^2+3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r^2+r\right)=\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \therefore \quad 4\sqrt{3}\,r^2+3r=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$16r^2+4\sqrt{3}\,r-1=0$$

$r>0$ であるから，$r=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{8}\ (=0.11421\cdots)$　を得る。

（さて，次の［問２］は至る所に直角があります。問１と比較すると計算が楽な感じですね。）

（解答・問２）

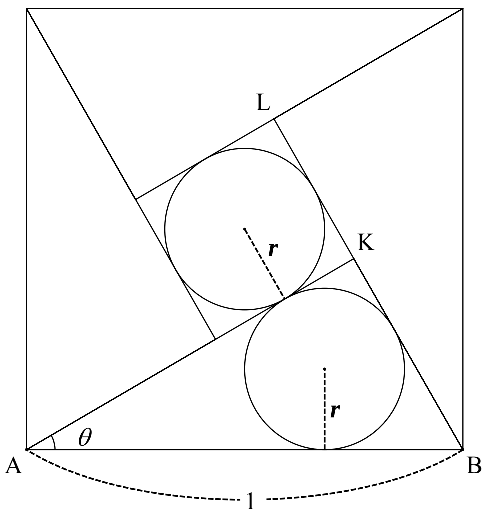
AK＝BL$=a$，BK＝b とおくと，KL＝$a-b$ なので，$r=\dfrac{1}{2}(a-b)$ となる。

△AKB は直角三角形なので，頂点と接点を結ぶ線分の長さを比べて

$$(a-r)+(b-r)=1$$

であるから，

$$r=\frac{1}{2}(a+b-1)$$



したがって，$a+b-1=a-b$　より，$b=\dfrac{1}{2}$ を得る。

ところで，$\sin\theta=b=\dfrac{1}{2}$ であるから，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ なので，

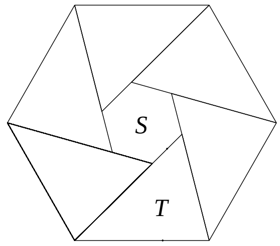
$$a=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得る。したがって，

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\ \ (=0.18301\cdots)$$

（解答・問３）

六角形 ABCDEF は，一辺が１の正六角形であるから，

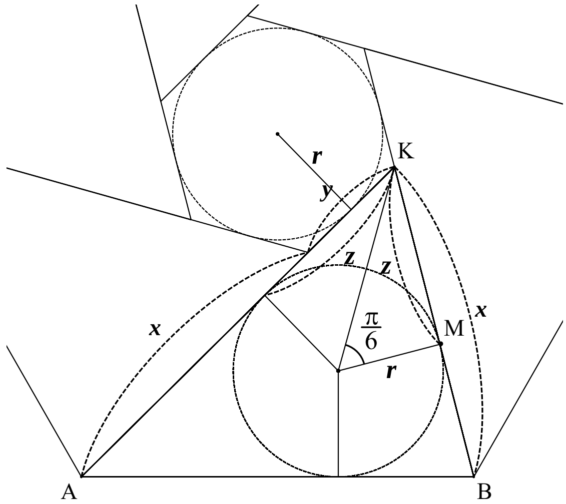


ABCDEF＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。また，中央の正六角形の面積をS，

６つある合同な三角形の面積をTとすると，

$$S+6T=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となる。さらに次の拡大図において，３つの線分の長さを x, y, z とおく。



また，$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$，　$z=\sqrt{3}\,r$ であるから，

$$S=6\times\frac{1}{2}r\,y=2\sqrt{3}\,r^2$$

$$T=(1+z)r=\left(1+\sqrt{3}\,r\right)r=\sqrt{3}\,r^2+r$$

であるから，

$$2\sqrt{3}\,r^2+6\left(\sqrt{3}\,r^2+r\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad 8\sqrt{3}\,r^2+6r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$16r^2+4\sqrt{3}r-3=0$$

$r>0$ であるから，

$$r=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}\ (=0.26761\cdots)$$

を得る。

ここまで，３つの場合の問題を考えてきた。正n角形のnをどんどん大きくしたときの半径$r=r_n$の値は，どうなっていくのだろう。それを考えるために，任意の自然数n $(n\geq 3)$に対して図の中の円の半径r_nを求めてみよう。

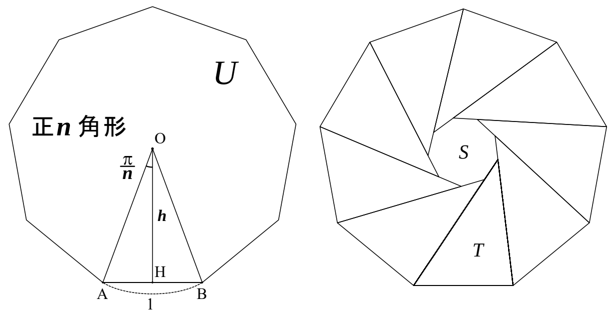
［問４］（正 n 角形への一般化）

１辺の長さが１の正 n 角形 ABC･･･内に n 個の点 K･･･をとり，その点と n 本の辺からできる n 個の三角形がすべて合同となるようにする。このとき，中央部に出来る正 n 角形の内接円の半径と，n 個の合同な三角形の内接円の半径は，すべて r_n であるという。

このとき，r_n の値を n を用いて表せ。

（問４・解答）

問１および問３と同様の手法で考える。



△OAH において，（$\tan\dfrac{\pi}{n}=t$ と略記）

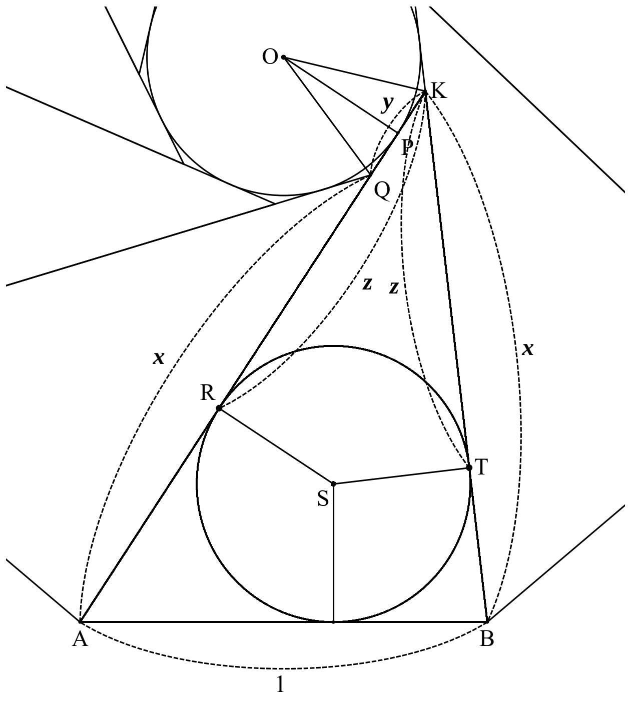
$$h\tan\frac{\pi}{n}=ht=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ h=\frac{1}{2t}$$

となり，正 n 角形全体の面積を U とすると，

$$U=n\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h=\frac{n}{4t}$$

また，中央の正六角形の面積を S，n 個ある合同な三角形の面積を T とする。

さて，右の拡大図において，AQ＝BK＝x，KQ＝y，KR＝KT＝z とおく。



$$y=2rt$$

であるから，

$$S=n\cdot\frac{1}{2}\cdot y\cdot r=ntr^2$$

また，

$$T=(1+z)r=\left(1+\frac{r}{t}\right)r$$

である。そして，$S+nT=U$ であるから，

$$ntr^2+n\left(1+\frac{r}{t}\right)r=\frac{n}{4t}$$

両辺に，$\dfrac{4t}{n}$ を掛け，

$$4t^2r^2+4t\left(1+\frac{r}{t}\right)r=1 \qquad \therefore\ 4t^2r^2+4tr+4r^2=1$$

$$4\left(1+t^2\right)r^2+4tr-1=0$$

$r>0$ であるから，

$$r=\frac{\sqrt{1+2t^2}-t}{2\left(1+t^2\right)}=\frac{\sqrt{1+2\tan^2\frac{\pi}{n}}-\tan\frac{\pi}{n}}{2\left(1+\tan^2\frac{\pi}{n}\right)}=r_n$$

を得る。

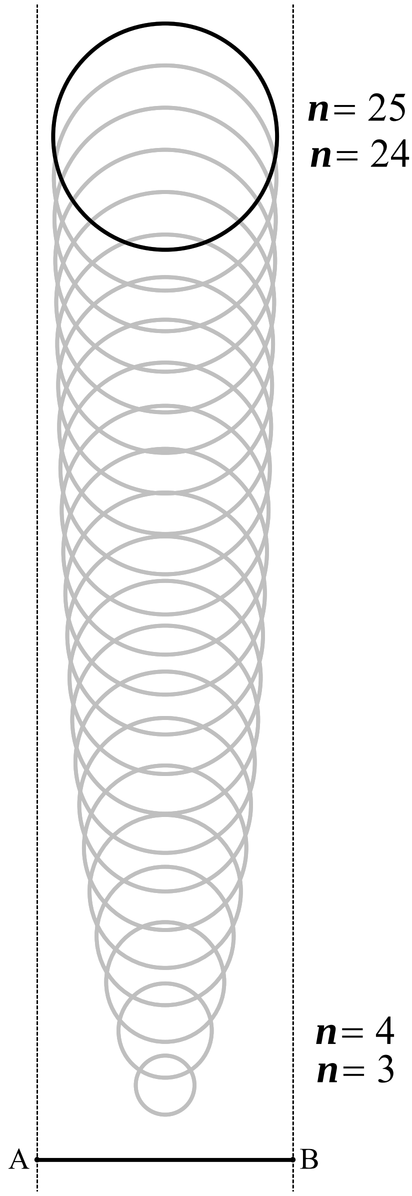
r_n を得たので，$n\to\infty$ とすると，

$t=\tan\frac{\pi}{n}\to +0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}$$

となる。

右の図は，辺 AB の位置を固定し，中央の円だけを重ねて描いた図である。n が増すにつれ，円は辺から遠ざかるが，辺 AB の長さの幅の中に収まっている。



さて，この等式を少し変型してみよう。

ただし，$\frac{\pi}{n}=\alpha$ と略記する。

$$r_n=\frac{\sqrt{1+2\tan^2\alpha}-\tan\alpha}{2\left(1+\tan^2\alpha\right)}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha}{2}\left\{\sqrt{1+2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right\}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{2}\left(\sqrt{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}-\sin\alpha\right)$$

$$=\frac{\cos\alpha}{2}\left(\sqrt{1+\sin^2\alpha}-\sin\alpha\right)$$

今まで，考察してきた図形は，「一辺の長さが1の正 n 多角形」である。これは，n が増すと，正 n 多角形そのものが，どんどん大きくなっていく。正 n 角形を一定の範囲の中にとどめる条件，・・・

例えば「半径1の円に内接する正 n 多角形」という条件に変えた時の半径 R_n を考えてみよう。

問５

問４において，「１辺の長さが１の正 n 角形」を「半径1の円に内接する正 n 多角形」とし，問題文の円の半径を R_n とする。このとき R_n の値を n を用いて表せ。

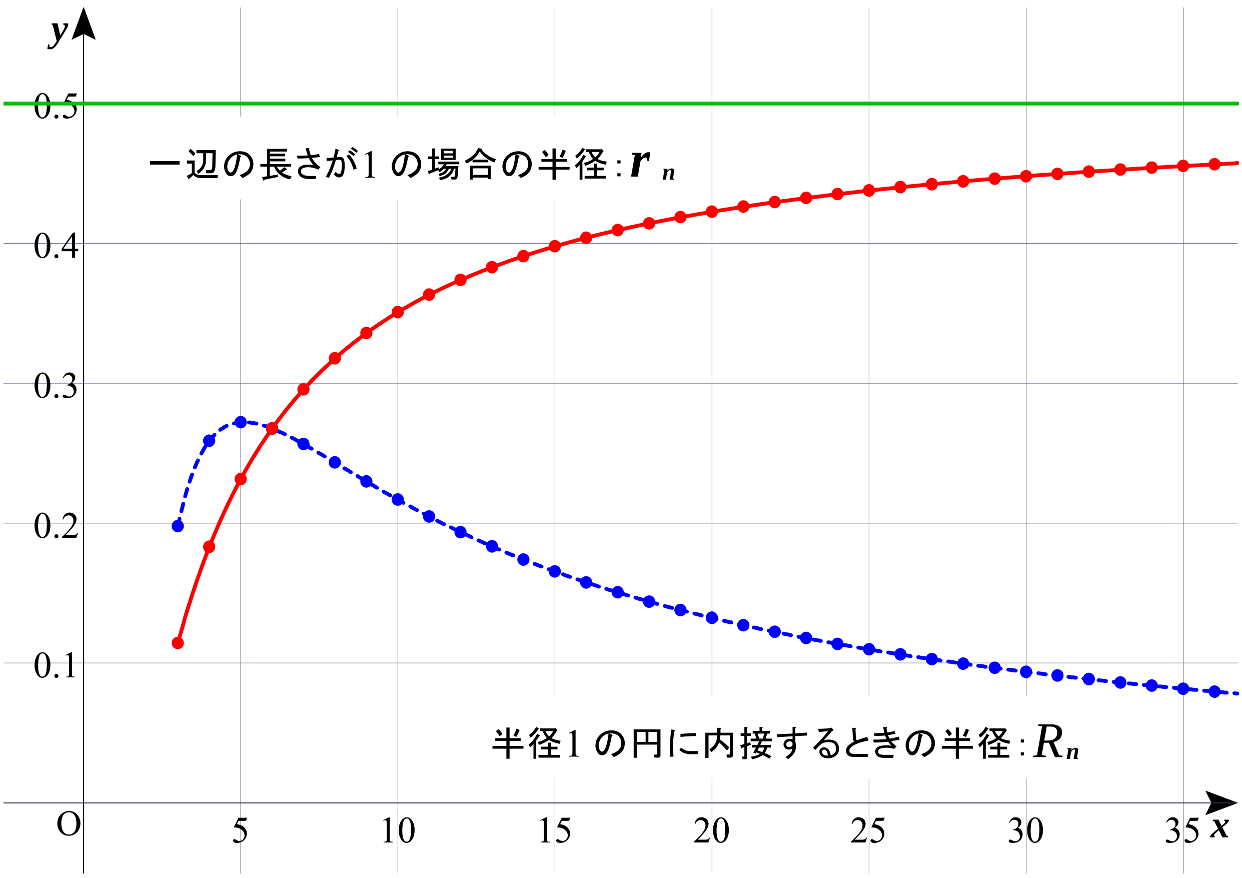
（問５・解答）

半径1の円に内接する正 n 角形の一辺を d とすると， $d=2\sin\dfrac{\pi}{n}$ なので，比を考え，

$$R_n=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\left(\sqrt{1+\sin^2\alpha}-\sin\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\left(\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi}{n}}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

である。この条件の下では，円の半径が最大になるのは，正５角形の時と分かる。

［半径 r_n と半径 R_n のグラフ］



当然であるが， $n=6$ の場合は，一辺の長さが1の正６角形は，半径1の円に内接するから，

$$r_6=R_6$$

となっている。

$n=3$ の場合は，以前から算額の問題として知られていました。この算額そのものは長らく現存しないと思われていましたが，平成２５年に伊豆韮山の江川邸の米蔵で発見されました。こういった事例は，珍しい事です。現在は，公益財団法人江川文庫の所蔵となっています。

$n=5$ の場合に円の半径が最大となっている。（$n=3$ から $n=14$ までの図）