正方形と４円の問題　　　　　　　　　　2019

［問題１］

一辺がの正方形OABCがある。辺OAの中点Pを中心とする半径の円を考える。（半径をとする。図は上半円のみ記載）

このとき、点Bを通り円Pに接線を引き辺OCとの交点をDとする。直角三角形BCDの内接円をQとし、図の様な円P , Qの共通接線と辺ABおよびBCとの交点をE , Fとする。線分BD,FGの交点をGとする。

三角形BEGの内接円をRとし、三角形BFGの内接円をSとする。

このとき、円Q , R , Sの半径を求めよ。



【確認事項】

３辺がの直角三角形の内接円の半径はである。

（説明）半径をとすると、

であるので，から、となる。

つまり、斜辺のが、内接円の半径である。

（解）

BAの延長上に点HをAHとなるようにとる。

点Hから引いた円Pへの接線とBDとの交点をIとし、

2直線OCとEFとの交点をJとする。

また、∠PBA，∠PJOとおく。

計算の流れのポイントは、

（１）　辺の比がの直角三角形

（２）　

の二つである。

以下、段階的に計算を進める。

（１）∠BDC∠DBAを求める。



であるから，

 ∠BDC∠DBA

（２）△BHI∽△DCBは，辺の比がの直角三角形である。

BH，HI，IB

 CB，DC，BD

であるから，を得る。

（３）相似比がである、2つの直角三角形JMQとJOPについて

　　CMより、MOJMであるから、JOである。したがって，

 

なので，

 ∠EJO

を得る。（１）の結果と合わせて，である。

（４）△FGBおよび△BGE共に、辺の比がの直角三角形である。

 CF　BF　　

BE 

以上、まとめて，



【おまけ】

　右図の辺の比がの直角三角形K,L,Mの半径は，

となる。

［問題２］****

図のように一辺の長さが１の正方形ABCDの中で，正方形の辺に接し，かつ２本の線分BE，GHにも接するように４円P，Q，R，Sがある。円の半径をそれぞれとする。

　このとき，半径の比を求めよ。

（解答）

　２円R,Sの存在を仮定しない条件の下∠BIGを示す。

　まず、直線BPと辺ADの交点をGとする。そして点Gと点Bから、円Pへの接線を右図のように引く。２直線の交点をとする。

　このとき，辺BGが共通で両端の角が等しいことから、

 △BAG△BG

である。したがって、BAB，∠BG∠BAG を得る。



次に、直線と辺BCおよび辺CDに接する円Qを描く。直線BQと辺CDの交点をHとする。そして、点Hから、円Qへの接線を右図のように引く。２直線の交点をとする。

　このとき，辺BHが共通で両端の角が等しいことから、

 △BCH△BH

である。したがって、BCB，∠BH∠BCH を得る。

　ところで，BABCであるから，BBとなる。つまり、点と点は一致しているので、これを改めて点Iとする。また、２直線は一致し、それは直線GHに他ならない。

　これらより，∠BIGである。

さて，円Rが存在するための条件を考察する。

直線と２直線AD，CDの交点をE、Fとする。

円Rは、四角形DEIHの内接円である。この円Rが存在する条件は、２つの相似な直角三角形△DGHと△IFHの内接円R, Rが一致することである。つまり△DGH△IFHとなる事である。

したがって、HD=HIとなる。前半部分の考察を加えて、HC=HD=HIとなる。加えて△EIGの内接円をSとする。

最後に、R, Rが一致する条件の下、∠HBC∠HBIとおくとHCであるから，

 

となる。したがって，

 

を得る。

　つまり△BCFは辺の比がの直角三角形である。

 

さらに△EAB，△HDG，△EIGは，すべて△BCFと相似である。

　それぞれ辺の長さから、内接円の半径を求めれば，

　 

を得る。

　したがって，

 

である。

［参考文献］

日本の幾何―――何題解けますか？　深川英俊・ダンペドー著　森北出版　1991（問題 ）

［追加問題１］

長方形ABCDの辺の比をとする。

この時，円の半径の逆数の比を簡単な整数比で表せ。



［追加問題２］

　長方形ABCDの辺の比をとする。

この時、円の半径の逆数の比を簡単な整数比で表せ。