Circle Sequence in Triangle ・・・三角形に内接する円列・・・



図１

［用語ならびに定義］

　（１）円列とは、同半径の円がある直線に接して、円が順次外接している円の列とする。（図１）

　円の個数を円列の長さと呼ぶことにする。図１では、長さはである。



図２

（２）辺に接している円列の両端の円が他の２辺に接しているとき、円列は三角形に内接していると定義する。（図２）

【第1部】



［問題］

半径が同じ３つの円列が三角形に

内接する条件を求めよ。

図３

［準備１］（確認）



図４

　△ABCの３辺の長さを、、 、、内接円の半径をとすると、



但し、

であることは、よく知られている。（図４）

［準備２］（三角形に内接する円列の半径）



図５

長さの円列（半径）が、辺BCに接している。（図５）

のとき、つまり円が１個のときは内接円そのものである。当然、となる。

　以下、円列の長さは２以上で考える。

　図５において、円の接線は、辺ABに平行な２つの接線のうち、 ABに近い方とする。点から辺ABに下ろした垂線の足をとし、点から辺に下ろした垂線の足をとする。このとき、



である。そして、とは相似であるから、



より、

・・・①

で考えているが、としてもとなり、この①式は成立する。



図６

［準備３］（他の辺に対する円列の半径）

　辺CAと辺ABに接している円列の長さを、とする。（図６，７）準備２と同様に、





図７



となる。

［準備４］（3つの円列の半径が等しくなる条件）

　図１のように、３つの円列の半径がみな等しくなるようにしたい。まず、とすると、



を整理して、　より、となる。

　次に、とすると、を得る。したがって、



という連比の等式が得られた。

円列の長さは2以上で考えているので、△ABCの辺の比は、正の整数比である。

実際の辺の長さは、実数値に取れる。例えば、３辺をとしても、としても相似な三角形であるから、辺の比を考えればよい。

［まとめ］

以下、辺の長さを正の整数として話を進める。その上では互いに素とする。（の最大公約数は１）

このとき、ある非負の整数が存在し、



とかける。とすると、内接円そのものである。以下、を考える。

［具体例］

の場合の例をみてみよう。



図９



図８

（例１）　図８は、つまり、の場合。

（例２）　図９は、つまり、の場合。

（例３）　図１０は、の場合。この場合、３つの円列の半径は、みな異なっている。

図１１



図１０

（例４）　図１１について、すこし解説をくわえる。

なので、この２辺のみ考えれば、であるから、辺BCに長さ４の円列を、辺CAに長さ３の円列をかくことで、この２辺に接する円列は半径を一致させることが出来る。ただ、この「半径の一致」を辺ABまで拡張はできない。この図では、辺ABに接する円列の長さは３であるが、長さを４にしても、幾つにしても、半径を等しくはできない。

［発展］

　今までは、三角形の内側に円列が接する条件の下で問題を考えていました。ここからは、条件を次のように変化させた問題を考えてみましょう。



図１2

（１）辺を延長した三角形を考え、その延長した辺の外側に円列を接しさせ、なおかつそれら3つの円列の半径を一致させられるだろうか。（図１２）

　（２）これらのことを三角形ではなく、四角形、五角形・・・に拡張できないだろうか。



図１3

（３）多角形を考えるのではなく「円に内接・外接する円列」を考えられるか。

つまり、ある円の外周と内周に円列が接することを考えてみる。この場合、円列の定義を円周に接すると変えて考え直す。

同じ円列の長さ（この場合は１周の円の個数とする）を等しくすると、内側と外側で半径は異なるし、半径を同じにすると、そもそも円列は１周して閉じるのだろうか。

もともと、そういう条件はあるのか？、無いのか？

【第2部】 同じ問題を考える。

［問題］

半径が同じ３つの円列が三角形に内接する条件を求めよ。（図3参照）



図１４

［解答］

　図１４のように、半径の３つの円列が内接したとする。その円列の長さは、それぞれ、とする。また、点は、円列の端の３つの円の中心とする。

　明らかに、、、であるから、とは相似である。

したがって、



を得る。この解答からは、円列の半径は計算されないが、結論が「即」求められた。

図１５



［三角形の外側に接する円列の半径の計算］

　第1部の［発展］に書かれた話題（１）の外接する場合の円の半径は、いったいどのような式で与えられるか、考えてみよう。

　図１５において、第1部にある図５に準じているので、平行や垂直の説明は省くことにする。



とは相似であるから、



となり、整理して、

・・・②　　　　　　

を得る。

　この②式は、第1部の①式ととだけの違いで、間違えそうですね。

|  |
| --- |
| 堀部和経　２０１９/４/１３ |