Circle Sequence in Triangle ・・・三角形に内接する円列・・・

［用語ならびに定義］

（１）円列とは、同半径の円がある直線に接して、円が順次外接している円の列とする。（図１）

円の個数を円列の長さと呼ぶことにする。図１では、長さは７である。

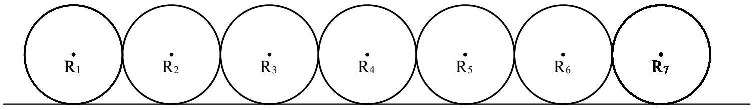

図１

（２）辺に接している円列の両端の円が他の２辺に接しているとき、円列は三角形に内接していると定義する。（図２）

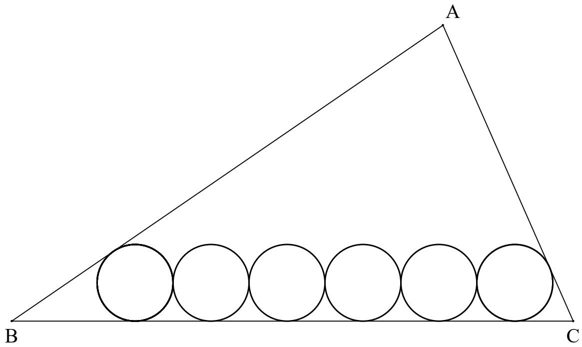

図２

【第１部】

［問題］

半径が同じ３つの円列が三角形に内接する条件を求めよ。

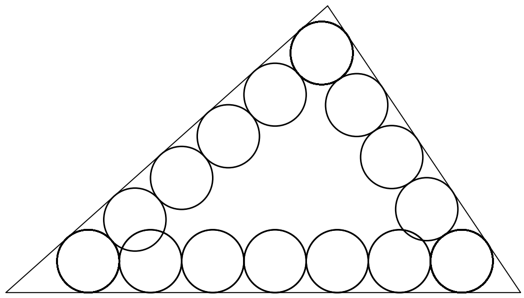

図３

［準備１］（確認）

△ABC の３辺の長さを、$a=\mathrm{BC}$、$b=\mathrm{CA}$、$c=\mathrm{AB}$、内接円の半径を r とすると、

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

但し、$s=\dfrac{1}{2}\left(a+b+c\right)$

であることは、よく知られている。（図４）

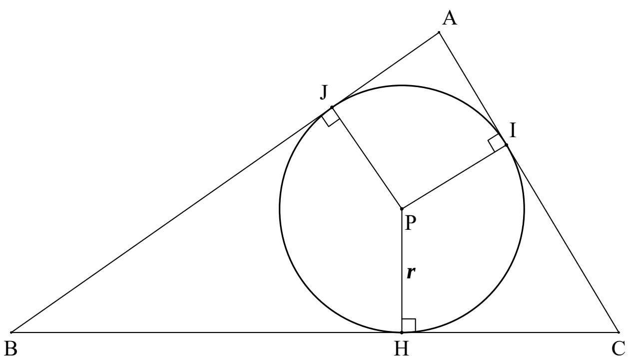

図４

［準備２］（三角形に内接する円列の半径）

長さlの円列（半径r_l）が、辺 BC に接している。（図５）

$l=1$のとき、つまり円が１個のときは内接円そのものである。当然、$r_1=r$となる。

以下、円列の長さは２以上で考える。

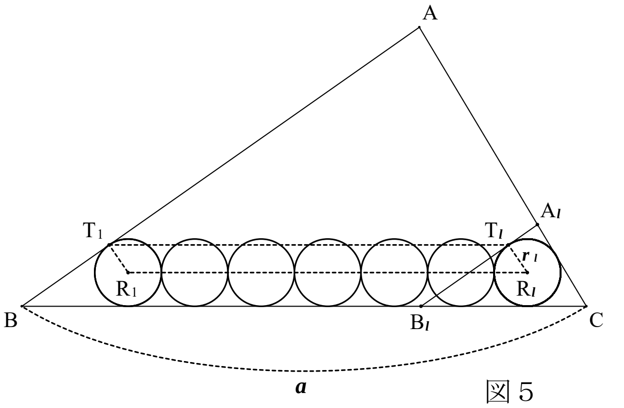

図５

図５において、円R_lの接線$\mathrm{A}_l\mathrm{B}_l$は、辺 AB に平行な２つの接線のうち、 AB に近い方とする。

点R_1から辺 AB に下ろした垂線の足をT_1とし､点R_lから辺$\mathrm{A}_l\mathrm{B}_l$に下ろした垂線の足をT_lとする。

このとき、

$$\mathrm{BB}_l=\mathrm{T}_1\mathrm{T}_l=\mathrm{R}_1\mathrm{R}_l=2(l-1)r_l$$

である。そして、$\triangle\mathrm{ABC}$と$\triangle\mathrm{A}_l\mathrm{B}_l\mathrm{C}$は相似であるから、

$$\mathrm{BC}:\mathrm{B}_l\mathrm{C}=a:\left\{a-2(l-1)r_l\right\}=r:r_l$$

より、

$$r_l=\frac{ar}{2r(l-1)+a}\quad・・・①$$

$l\geq 2$で考えているが、$l=1$としても$r_1=r$となり、この①式は成立する。

［準備３］（他の辺に対する円列の半径）

辺 CA と辺 AB に接している円列の長さをm、nとする。（図６， ７）準備２と同様に、

$$s_m=\frac{br}{2r(m-1)+b}$$

$$t_n=\frac{cr}{2r(n-1)+c}$$

となる。

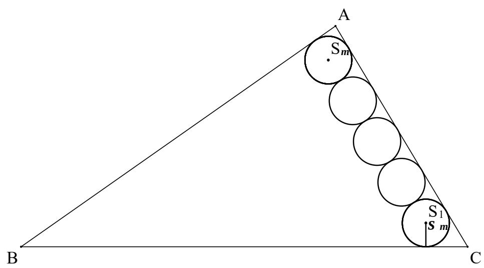

図６

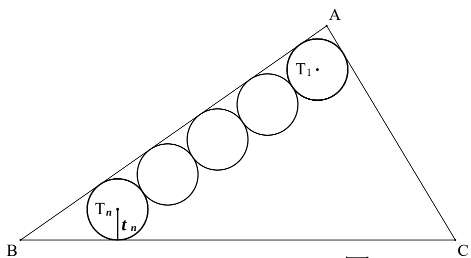

図７

［準備４］（3 つの円列の半径が等しくなる条件）

図１のように、３つの円列の半径がみな等しくなるようにしたい。まず、$r_l = s_m$ とすると、

$$\frac{ar}{2r(l-1)+a} = \frac{br}{2r(m-1)+b}$$

を整理して、$(m-1)a = (l-1)b$　より、$a:b = (l-1):(m-1)$ となる。

次に、$r_l = t_n$ とすると、$a:c = (l-1):(n-1)$ を得る。したがって、

$$a:b:c = (l-1):(m-1):(n-1)$$

という連比の等式が得られた。

円列の長さは２以上で考えているので、△ABC の辺の比 $a:b:c$ は、正の整数比である。

実際の辺の長さは、実数値に取れる。例えば、３辺を $4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$ としても、4, 5, 6 としても相似な三角形であるから、辺の比を考えればよい。

［まとめ］

以下、辺の長さを正の整数として話を進める。その上で a, b, c は互いに素とする。（a, b, c の最大公約数は１）

このとき、ある非負の整数 k が存在し、

$$l = ak+1, \quad m = bk+1, \quad n = ck+1$$

とかける。$k=0$ とすると、内接円そのものである。以下、$k \geq 1$ を考える。

［具体例］

$a:b:c = 6:4:5$ の場合の例をみてみよう。

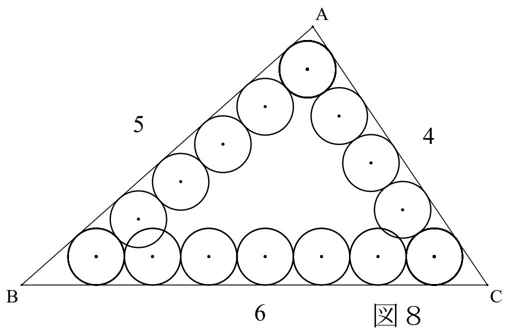

図８

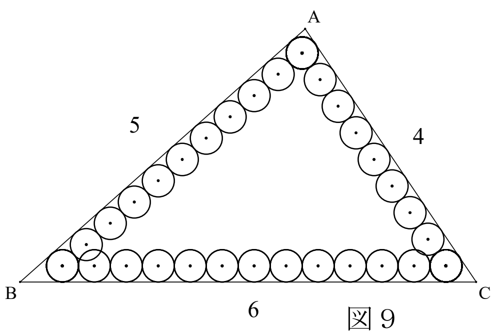

図９

（例１）　図８は、$k=1$ つまり、$l=7,\ m=5,\ n=6$ の場合。

（例２）　図９は、$k=2$ つまり、$l=13,\ m=9,\ n=11$ の場合。

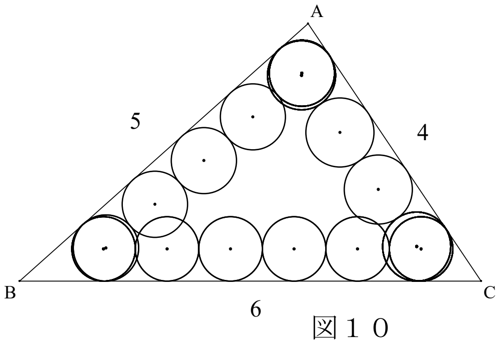

図１０

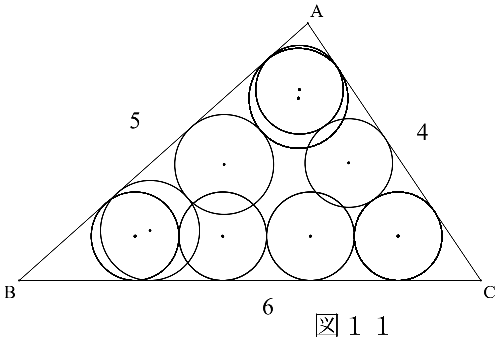

図１１

（例３）　図１０は、$l=6,\ m=4,\ n=5$ の場合。この場合、３つの円列の半径は、みな異なっている。

（例４）　図１１について、すこし解説をくわえる。

$a=6, b=4$ なので、この２辺のみ考えれば、$a:b=6:4=3:2$ であるから、辺 BC に長さ４の円列を､辺 CA に長さ３の円列をかくことで､この２辺に接する円列は半径を一致させることが出来る。ただ、この「半径の一致」を辺 AB まで拡張はできない。この図では、辺 AB に接する円列の長さは３であるが、長さを４にしても、幾つにしても、半径を等しくはできない。

［発展］

今までは、三角形の内側に円列が接する条件の下で問題を考えていました。ここからは、条件を次のように変化させた問題を考えてみましょう。

（１）辺を延長した三角形を考え、その延長した辺の外側に円列を接しさせ、なおかつそれら３つの円列の半径を一致させられるだろうか。（図１２）

（２）これらのことを三角形ではなく、四角形、五角形・・・に拡張できないだろうか。

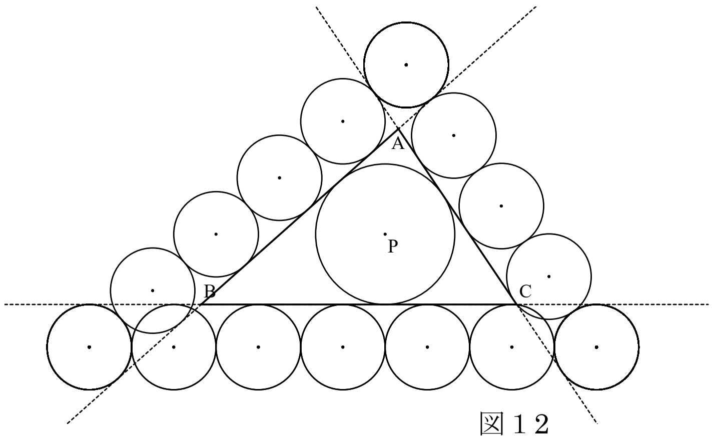

図12

（３）多角形を考えるのではなく「円に内接・外接する円列」を考えられるか。

つまり、ある円の外周と内周に円列が接することを考えてみる。この場合、円列の定義を円周に接すると変えて考え直す。

同じ円列の長さ（この場合は１周の円の個数とする）を等しくすると、内側と外側で半径は異なるし、半径を同じにすると、そもそも円列は１周して閉じるのだろうか。

もともと、そういう条件はあるのか？、無いのか？

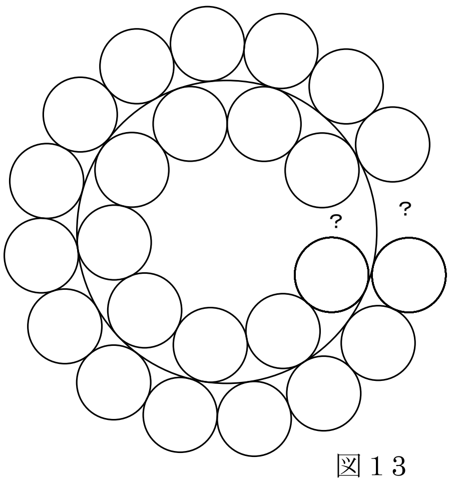

図13

【第２部】 同じ問題を考える。

［問題］
半径が同じ３つの円列が三角形に内接する条件を求めよ。(図３参照)

［解答］

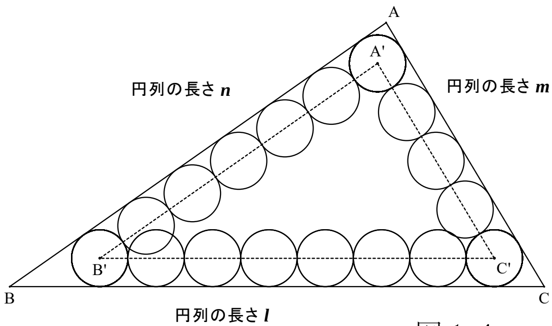

図１４

図１４のように、半径 r の３つの円列が内接したとする。その円列の長さは、それぞれ、l, m, n とする。また、点 A', B', C' は、円列の端の３つの円の中心とする。

明らかに、AB // A'B'、BC // B'C'、CA // C'A' であるから、△ABC と △A'B'C' は相似である。

したがって、

$$a:b:c=2(l-1)r:2(m-1)r:2(n-1)r=(l-1):(m-1):(n-1)$$

を得る。この解答からは、円列の半径は計算されないが、結論が「即」求められた。

［三角形の外側に接する円列の半径の計算］

第１部の［発展］に書かれた話題（1）の外接する場合の円の半径は、いったいどのような式で与えられるか、考えてみよう。

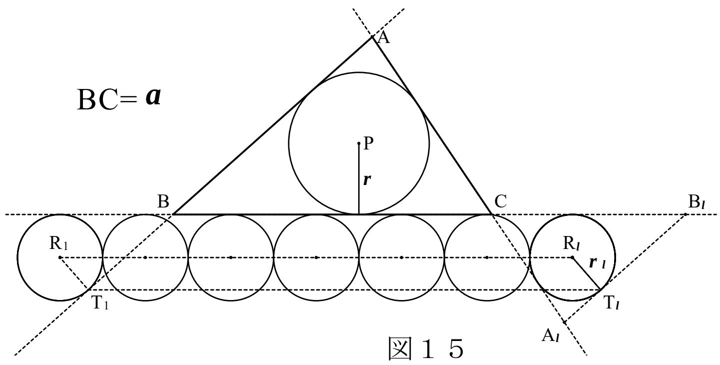

図１５

図１５において、第１部にある図５に準じているので、平行や垂直の説明は省くことにする。

$$a+\mathrm{CB}_l=\mathrm{BB}_l=\mathrm{TT}_l=\mathrm{R}_1\mathrm{R}_l=2(l-1)r_l$$

△ABC と △$\mathrm{A}_l\mathrm{B}_l$C は相似であるから、

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CB}_l=a:\{a-2(l-1)r_l\}=r:r_l$$

となり、整理して、

$$r_l=\frac{ar}{2r(l-1)-a}\quad\cdot\cdot\cdot②\qquad\left(\text{参考}\ r_l=\frac{ar}{2r(l-1)+a}\quad\cdot\cdot\cdot①\right)$$

を得る。

この②式は、第１部の①式と"+"と"−"だけの違いで、間違えそうですね。

堀部和経　２０１９/4/１３