p が素数ならば，$\sqrt{p}$ は無理数である。

【証明】

背理法で示す。$\sqrt{p}$ を有理数と仮定する。よって，

$$\sqrt{p} = \frac{y}{x} \quad (x, y \text{ は正の整数})$$

とおける。これから，

$$y^2 = p \cdot x^2$$

となる。

ここで，両辺を素因数分解し，素数 p の指数を数えると，左辺は偶数であるが，右辺は奇数である。これは，素因数分解の一意性に矛盾する。

【証明終わり】

n が平方数でない正の整数ならば、$\sqrt{n}$ は無理数である。

【証明】

n の条件から，n の素因数 p でその指数が奇数のものが存在する。

$$\sqrt{n} = \frac{y}{x} \quad (x, y \text{ は正の整数})$$

とおけば，

$$y^2 = n \cdot x^2$$

となる。

上の証明と同様に，素数 p の指数を数えると矛盾する。

【証明終わり】

春日井東高等学校　堀部和経　2012/10/12