

i^i の値

虚数単位 i の i 乗とは、いったい何だろうか??? この値を求めてみよう。

§ 1 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ について

こんな説明では、どうかな? . . .

$$f(x) = (\cos x - i \sin x) e^{ix}$$

とおく、すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\sin x - i \cos x) e^{ix} + (\cos x - i \sin x) i e^{ix} \\ &= (-\sin x - i \cos x) e^{ix} + (i \cos x - i^2 \sin x) e^{ix} \\ &= (-\sin x - i \cos x + i \cos x + \sin x) e^{ix} = 0 \times e^{ix} = 0 \end{aligned}$$

したがって、 $f'(x) = 0$ より $f(x) = (\cos x - i \sin x) e^{ix}$ は定数関数となります。

$$f(x) = f(0) = (\cos 0 - i \sin 0) e^{i \cdot 0} = 1$$

つまり、 $(\cos x - i \sin x) e^{ix} = 1$ なので

$$e^{ix} = \frac{1}{\cos x - i \sin x} = \cos x + i \sin x$$

となり、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を得る事ができました。

§ 2 i^i の値について

オイラーの公式に、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると、

$$e^{i \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

を得る。したがって、

$$i^i = \left(e^{i \frac{\pi}{2}} \right)^i = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad \left(= \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \right), \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \right), \quad (= 0.20787957635 \dots)$$