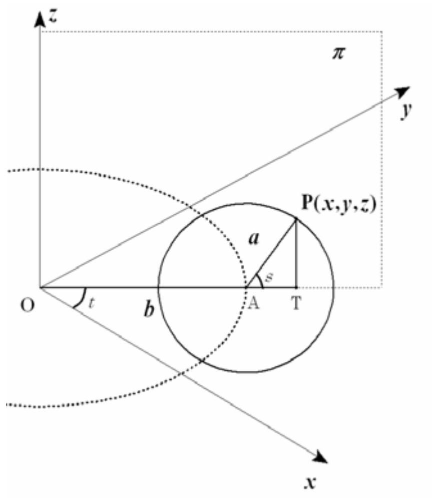
トーラスを切る　ヴィラソーの円

愛知県立春日井高等学校　堀部和経（ほりべ かずのり）



§１　トーラスＴの表現

z 軸を含む平面内にある半径 a の円の中心が z 軸から b だけ離れて、z 軸を１周してできるトーラスＴを考える。但し、$0<a<b$ とする。

すると、トーラスＴのパラメーター表示は、

$$\begin{cases} x=(a\cos s+b)\cos t \\ y=(a\cos s+b)\sin t \\ z=a\sin s \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

となる。

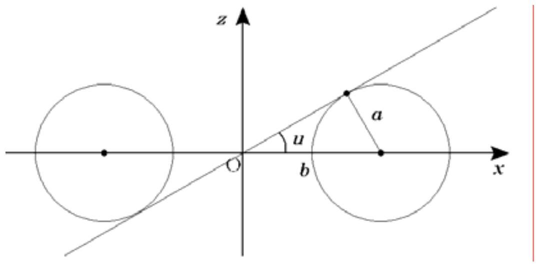
§２　交わる２円になる証明

トーラスＴの方程式は、パラメーター表示①から、s,t を消去すると次のようになる。

$$\mathrm{T}:\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

（注）直接、直角三角形ＡＰＴにおいて、ピタゴラスの定理を用いてもよい。

さて、図のように y 軸を含み x 軸と角 u で交わる平面とトーラスの断面を考えるために、y 軸を回転軸とする角度（$-u$）の回転を考える。



回転後の座標を、(X,Y,Z) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-u) & 0 & -\sin(-u) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-u) & 0 & \cos(-u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

である。

ところで、$\cos u=\dfrac{c}{b},\sin u=\dfrac{a}{b}$ 但し、$c=\sqrt{b^2-a^2}$ であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{c}{b} & 0 & -\dfrac{a}{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a}{b} & 0 & \dfrac{c}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。

さて、回転後の平面 $Z=0$ 上の曲線を調べてみよう。

方程式②に、$Z=0$ とおいた③を代入すると、

$$\left\{\sqrt{\left(\frac{c}{b}X\right)^2+Y^2}-b\right\}^2+\left(\frac{a}{b}X\right)^2=a^2$$

となる。分母を払い、c を消去すると、

$$\left\{\sqrt{\left(\sqrt{b^2-a^2}X\right)^2+(bX)^2}-b^2\right\}^2+(aX)^2=a^2b^2$$

であるから、展開し整理する。

$$X^2+Y^2+b^2-a^2=2\sqrt{\left(b^2-a^2\right)X^2+b^2Y^2}$$

を得るので、両辺を２乗すると、

$$\left(X^2+Y^2+b^2-a^2\right)^2=4\left(b^2-a^2\right)X^2+4b^2Y^2$$

となる。以下、この式を整理する。

$$X^4+Y^4+2X^2Y^2-2(b^2-a^2)X^2-2(b^2+a^2)Y^2+(b^2-a^2)^2=0$$

$$(X^2-b^2)^2+2(Y^2+a^2)(X^2-b^2)+(Y^2-a^2)^2=0$$

左辺を、(X^2-b^2) の２次式と見ると、上手く因数分解できるのがわかる。

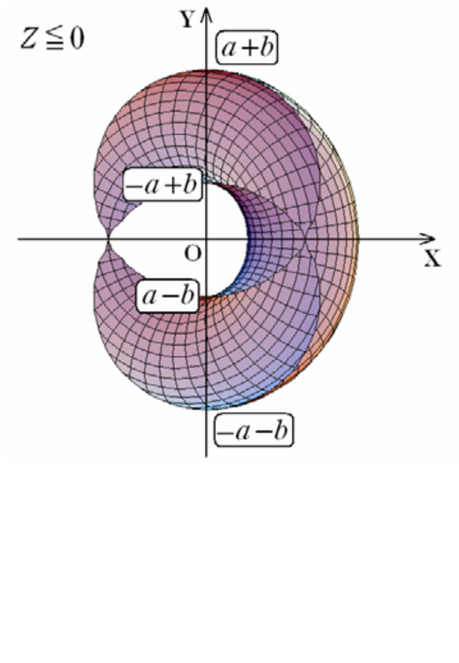
$$\left\{(X^2-b^2)+(Y+a)^2\right\}\left\{(X^2-b^2)+(Y-a)^2\right\}=0$$

したがって、次の２円を得る。

$$X^2+(Y+a)^2=b^2$$

$$X^2+(Y-a)^2=b^2$$

中心が $(0,\pm a)$ で、半径が b の円である。



これって、とっても綺麗な結果と思いません？

§３　原典（元ネタ）

直井功先生（岐阜県）に教えて頂きました。先生は、幾何学大事典の編集にも参加されていました。

小倉金之助によって日本語訳（大正４年＝１９１５年）された、るーしぇ，こんぶるーす共著「初等幾何学」（１９００年）の１２４４番に、ＹＶＯＮ　ＶＩＬＬＡＲＣＥＡＵ（１８４８年）の結果として載っています。図は、その本（原本）の（中）表紙と証明用の図６２３です。

TRAITÉ

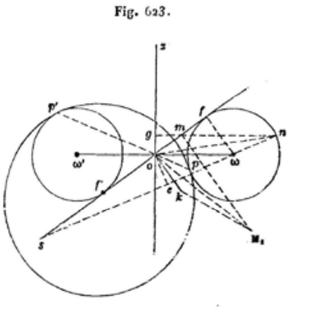
GÉOMÉTRIE

Eugène ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE.

PREMIÈRE PARTIE.

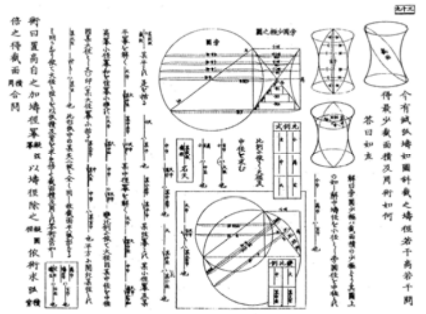
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE



ところが、同様の結果が、長谷川弘，内田久命の「算法求積通考」（天保１５年＝弘化元年＝１８４４年）の３９番の問題に記載があります。

右の図は、その表紙と問題３９ならびに解答です。但し、複数ページにまたがる解答をレイアウトし直してあります。



少し時間の前後はありますが、ほとんど同じ時期に、同じようなことを考えているなんて、面白いですね。このようなことは、いろいろな分野で確認できます。

うーん、不思議なことなのか、当然と考えるべきなのか、…！？

ヴィラソー（天文学者）について
Ａｎｔｏｉｎｅ　Ｊｏｓｅｐｈ　Ｆｒａｎｃｏｉｓ　Ｙｖｏｎ　Ｖｉｌｌａｒｃｅａｕ　です。
生没年は、１８１３／１／１５～１８８３／１２／２３

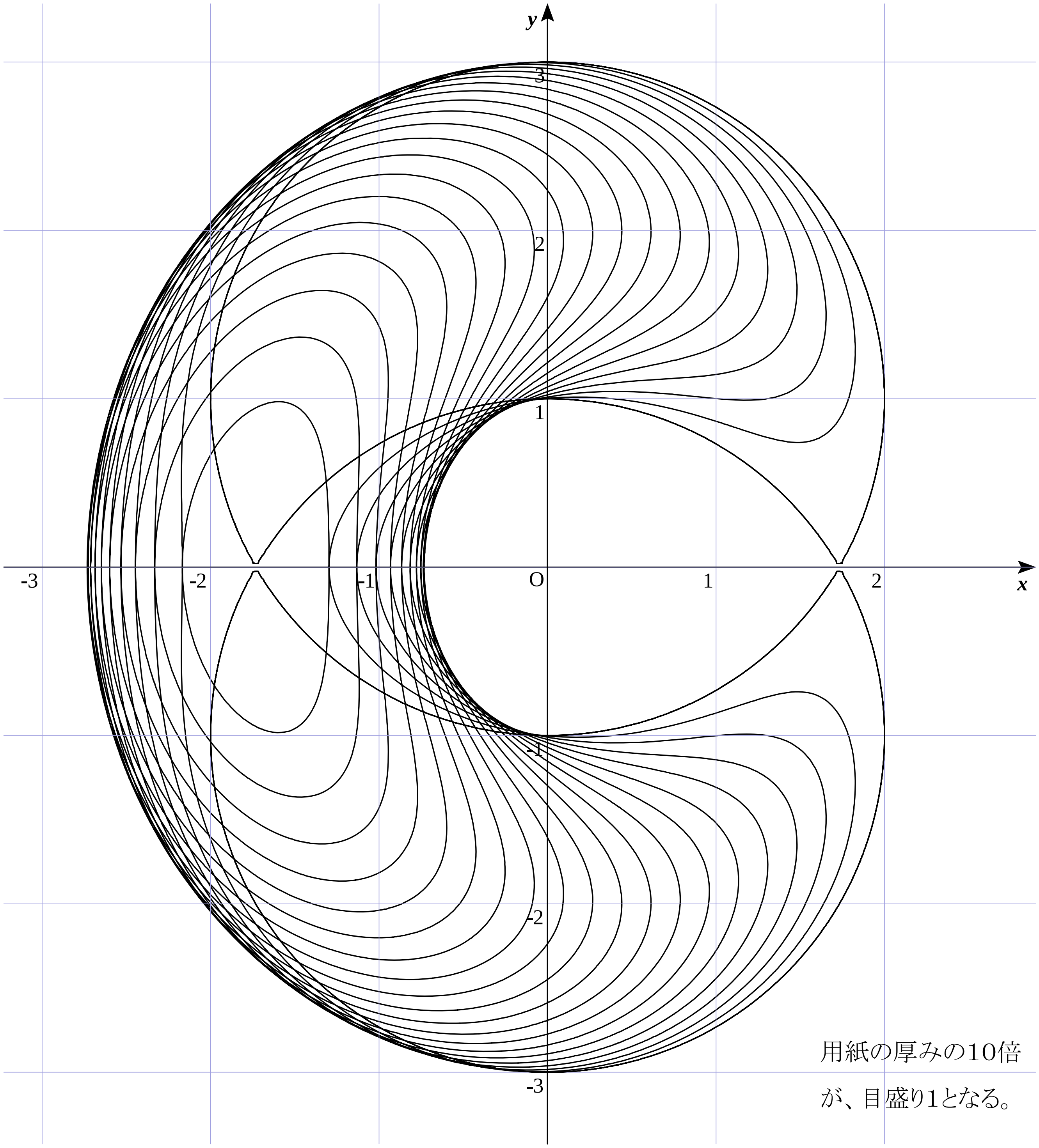
§４　GRAPES を使って工作しました。

立体図形でも、等高線なら GRAPES はすぐに描いてくれますね。(^_^)v

GRAPES のファイル、≪torus_cut.gps≫で、等高線を描き、重ね合わせて模型を作りました。用紙代のみで作成可能です。

URL　http://horibe.jp　　E-mail　kazunori@horibe.jp

GRAPES で描いた、トーラスの等高線。実際に作るときは、直接 GRAPES で数本ずつ等高線を描いて、３ｍｍ厚のスチレンボードに糊付けし、カッターなどで輪郭を切り取り、位置を間違えないで貼り合わせる。



用紙の厚みの10倍が、目盛り1となる。