

# 展開図が三角形になる四面体

[1] 四面体の展開図になる可能性のある三角形の配置は3通りである。

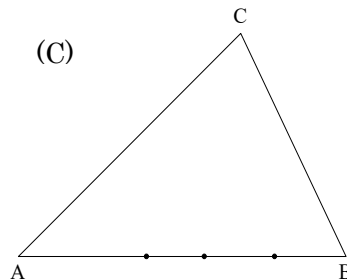
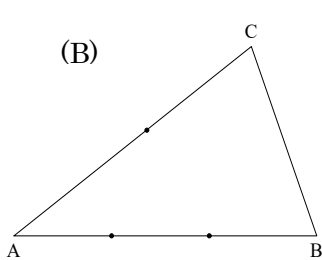
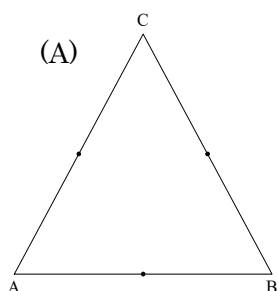
四面体は、4つの三角形で出来ている。したがって、展開図を作るためには、3本の辺を繋いで4つの三角形を「ひとつの図形」にしなくてはならない。「辺」の延べ数は  $4 \times 3 = 12$  なので、展開図中の「辺」は、 $12 - 3 = 9$  本である。3本の「辺」は三角形内部にあるので、残りの6本の「辺」は展開図の辺上にある。したがって、「辺」の辺への配置は、次の3通りである。

(注意)四面体の面の三角形の辺を「辺」と表した。

(A)  $6 = 2 + 2 + 2$

(B)  $6 = 3 + 2 + 1$

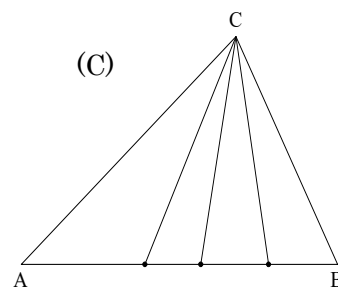
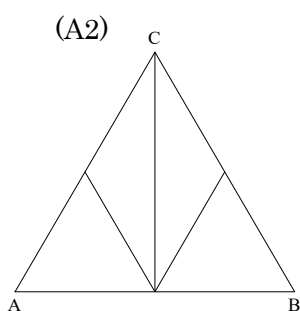
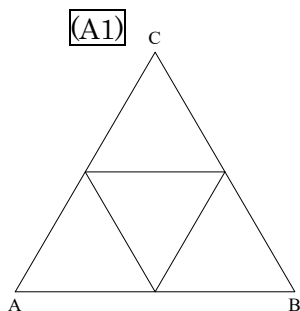
(C)  $6 = 4 + 1 + 1$



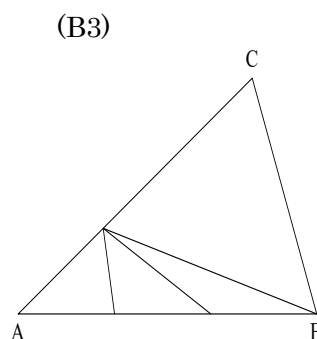
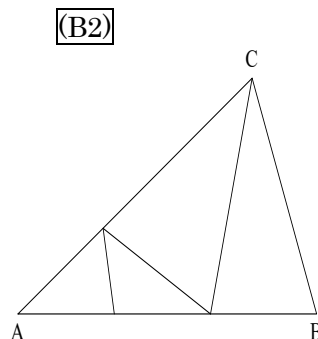
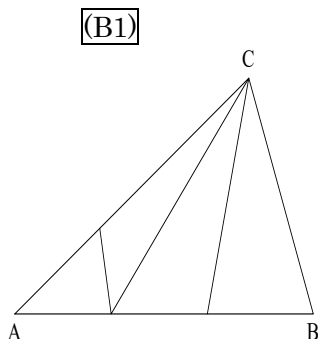
それぞれの場合について、三角形内部にある「辺」の配置を考える。

(A) 2通り

(C) 1通り



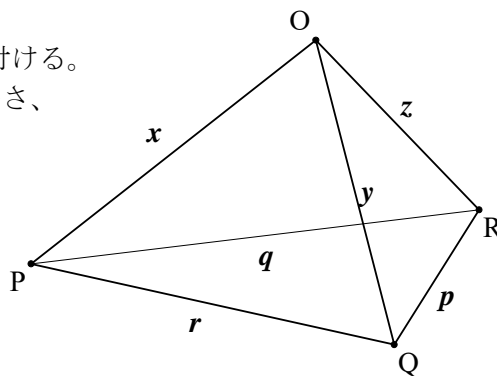
(B) 3通り



内部にある「辺」の配置は、この6通りである。しかし、(A2), (B3), (C)の場合は1つの頂点の周りに4つの三角形が配置されているので、四面体の展開図にはならない。ゆえに、(A1), (B1), (B2)の3通りの配置のみ四面体の展開図になる可能性がある。

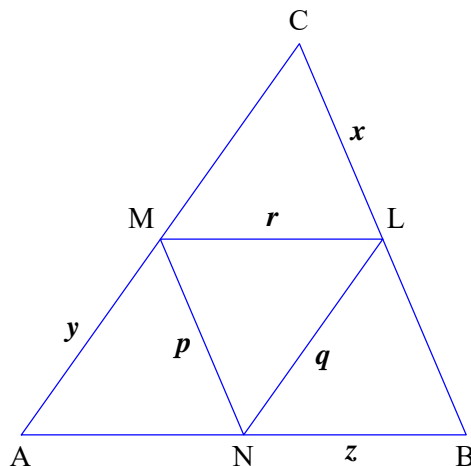
## [2] 「展開図」が組み立て可能になる必要条件

3つのパターンを改めて次のように Type1~3 と名付ける。  
 また、[2] の図中の記号  $p, q, r, x, y, z$  は各線分の長さ、  
 位置関係は右の図のようである。



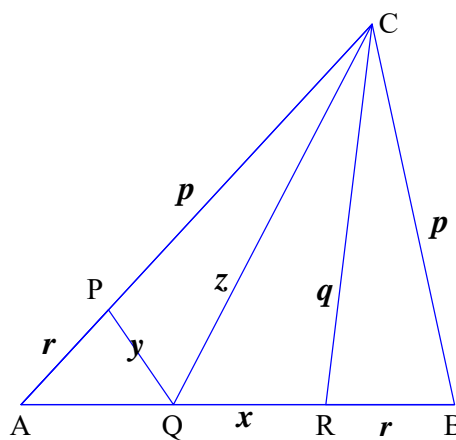
### Type 1

1. 三角形の各辺の中点  $L, M, N$  をとる。
2.  $L \cdot M \cdot N$  を結んで、4つの合同な三角形を作る。



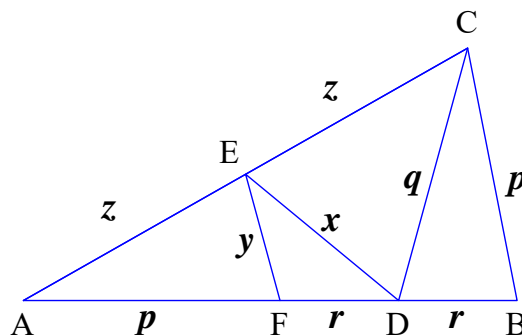
### Type 2

0.  $CA > CB$  とする。
1. 辺  $CA$  上に  $CP = CB$  を満たす点  $P$  をとる。
2. 辺  $AB$  上に、 $BR = AP$  を満たす点  $R$  をとる。
3. 線分  $AR$  の中点を  $Q$  とする。
4.  $P \cdot Q \cdot C \cdot R$  を結ぶ。



### Type 3

0.  $AB > CB$  とする。
1. 辺  $AB$  上に  $AF = CB$  を満たす点  $F$  をとる。
2. 線分  $FB$  の中点を  $D$  とする。
3. 線分  $CA$  の中点を  $E$  とする。
4.  $C \cdot D \cdot E \cdot F$  を結ぶ。



### [3] 「展開図」の組み立て可能条件(必要十分条件)

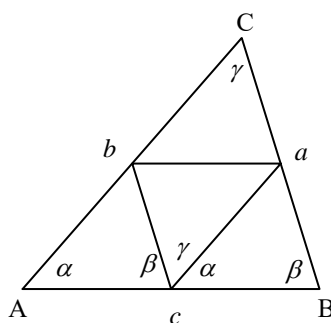
Type1~3 のいずれにおいても、元の三角形の形状によっては、[2] のように展開図を作っても四面体を組み立てられない場合がある。

そこで、以下では、四面体の組み立て可能な条件を調べてみた。

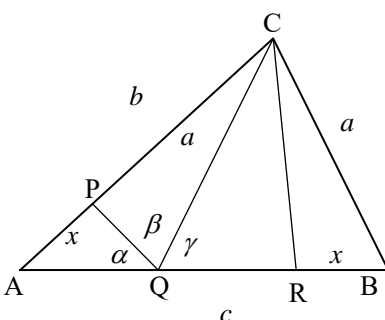
展開図が組み立て可能であるためには、ひとつの頂点（そこには3つの角が集まる）で組み立て可能であればよい。

なぜなら、ひとつの頂点で組み立て可能であれば、その頂点に接しない3つの辺が三角形を作るように、[2] 「展開図」 が組み立て可能になる必要条件で辺の分割点を設定した。

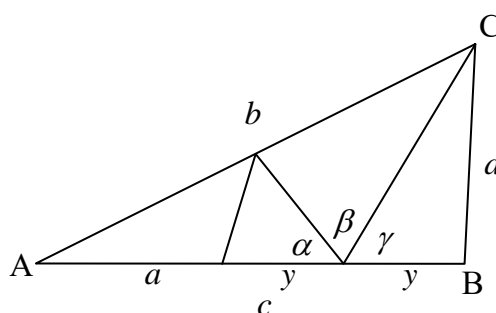
Type1



Type2



Type3



さて、上の3つの Type ともに、組み立て可能条件は、 $\alpha, \beta, \gamma$  において、2角の和が残りの角より大きければよい。

いま、 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  なので、

$$\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha < \pi - \alpha \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$$

同様に、 $\beta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  を得る。つまり、 $\alpha, \beta, \gamma$  ともに鋭角である。

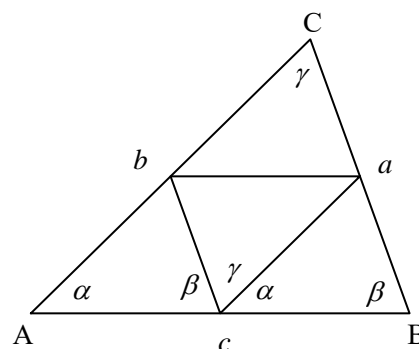
なお、下記の性質1~6については、[4]に証明がある。

#### ◎組み立て可能条件(Type1)

$\triangle ABC$  が鋭角三角形である。

したがって、辺の条件としては、

$a^2 + b^2 > c^2$  かつ  $b^2 + c^2 > a^2$  かつ  $c^2 + a^2 > b^2$  である。

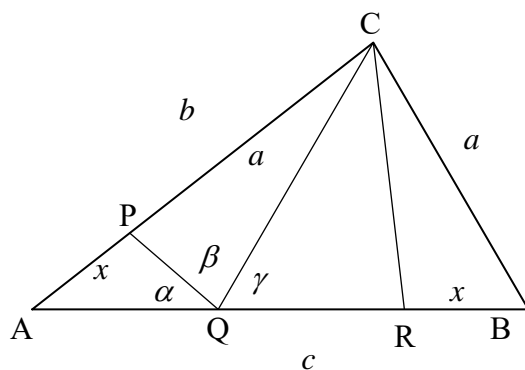


◎組み立て可能条件(Type2) ( $a < b$ とする)

$\gamma$  は常に鋭角である。 (性質1)

$\alpha$  は鋭角  $\Leftrightarrow a^2 + ac > b^2$   
 $\Leftrightarrow 2A > B$  (性質2)

$\beta$  は鋭角  $\Leftrightarrow a + c < 2b$  (性質3)

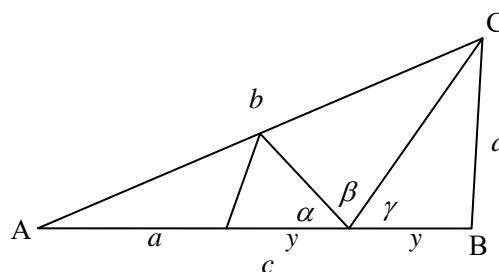


◎組み立て可能条件(Type3) ( $a < c$ とする)

$\alpha$  は常に鋭角である。 (性質4)

$\beta$  は鋭角  $\Leftrightarrow c < 3a$  (性質5)

$\gamma$  は鋭角  $\Leftrightarrow a^2 + ac < b^2$   
 $\Leftrightarrow 2A < B$  (性質6)



[4] 性質1~6の証明

(性質1)

$\gamma$  は常に鋭角である

(証明)

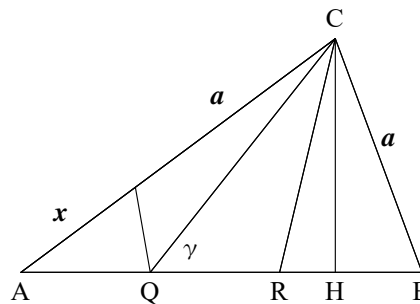
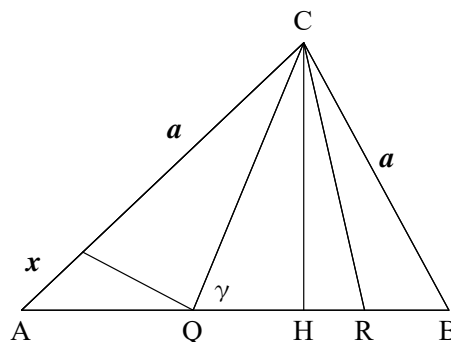
頂点Cから対辺ABに引いた垂線をCHとし、  
 辺ABの中点をMとする。

$b > a$  より、 $AM < AH$ である。よって、

$$AQ = \frac{1}{2} AR < \frac{1}{2} AB = AM < AH$$

であるから、

$$\gamma = \angle CQH < 90^\circ$$



(性質 2)

$$\alpha \text{ は鋭角} \Leftrightarrow a^2 + ac > b^2 \Leftrightarrow 2A > B$$

(証明)

$$\begin{aligned} & PQ^2 + AQ^2 - AP^2 \\ &= (x^2 + y^2 - 2xy \cos A) + y^2 - x^2 \\ &= 2y^2 - 2xy \cos A \\ &= 2y(y - x \cos A) \end{aligned}$$

よって,

$$PQ^2 + AQ^2 - AP^2 > 0 \Leftrightarrow y > x \cos A$$

ところで,

$$\begin{aligned} & 2bc(y - x \cos A) \\ &= 2bc \cdot \frac{c - b + a}{2} - 2bc(b - a) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= bc(c - b - a) - (b - a)(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= -a^3 - b^3 + ab^2 + a^2b - b^2c + c^2a - abc \\ &= ac^2 + (ab - b^2)c - (a - b)(a^2 - b^2) \\ &= (ac + a^2 - b^2)(c - a + b) \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha \text{ は鋭角} \Leftrightarrow PQ^2 + AQ^2 - AP^2 > 0 \Leftrightarrow y > x \cos A \Leftrightarrow a^2 + ac > b^2$$

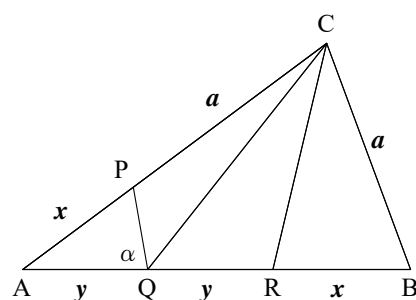
次に,

$$\begin{aligned} & a^2 + ac - b^2 \\ &= a^2 + ac - (c^2 + a^2 - 2ca \cos B) \\ &= c(a - c + 2a \cos B) \\ &= 2Rc(\sin A - \sin C + 2 \sin A \cos B) \\ &= 2Rc\{\sin A - \sin(A + B) + 2 \sin A \cos B\} \\ &= 2Rc(\sin A - \sin A \cos B - \cos A \sin B + 2 \sin A \cos B) \\ &= 2Rc\{\sin A + \sin(A - B)\} \\ &= Rc \sin \frac{2A - B}{2} \cos \frac{B}{2} \end{aligned}$$

※但し、 $R$  は三角形  $ABC$  の外接円の半径

よって,

$$a^2 + ac > b^2 \Leftrightarrow \sin \frac{2A - B}{2} > 0 \Leftrightarrow 2A > B$$



(性質3)  $\beta$ は鋭角 $\Leftrightarrow a+c < 2b$

(証明)

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AQ \cdot AP \cos A$$

$$CQ^2 = AC^2 + AQ^2 - 2AQ \cdot AC \cos A$$

ここで,

$$b = a + x, c = x + 2y$$

とおくと,

$$PQ^2 + CQ^2 - CP^2$$

$$= x^2 + 2y^2 + (x+a)^2 - a^2 - 2y(2x+a) \frac{(x+a)^2 + (x+2y)^2 - a^2}{2(x+a)(x+2y)}$$

よって,

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(x+a)(x+2y)(PQ^2 + CQ^2 - CP^2) \\ &= 2(x+a)(x+2y)\{2xa + 2y^2 + (x+a)^2 - a^2\} \\ &\quad - y(2x+a)\{(x+a)^2 + (x+2y)^2 - a^2\} \\ &= 4\{(x+2y)a + x(x+2y)\}\{xa + (x^2 + y^2)\} \\ &\quad - 4\{ya + 2xy\}\{xa + (x^2 + 2yx + 2y^2)\} \end{aligned}$$

以下、 $a$ の2次式として整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= x(x+2y)a^2 + \{x^2(x+2y) + (x+2y)(x^2 + y^2)\}a + x(x+2y)(x^2 + y^2) \\ &\quad - yxa^2 - \{2yx^2 + y(x^2 + 2yx + 2y^2)\}a - 2xy(x^2 + 2yx + 2y^2) \\ &= x(x+2y)a^2 + \{2x^3 + 4yx^2 + y^2x + 2y^3\}a + x(x^3 + 2yx^2 + y^2x + 2y^3) \\ &\quad - yxa^2 - \{3yx^2 + 2y^2x + 2y^3\}a - x(2yx^2 + 4y^2x + 4y^3) \\ &= x(x+y)a^2 + (2x^3 + yx^2 - y^2x)a + x(x^3 - 3y^2x - 2y^3) \\ &= x\{(x+y)a^2 + (2x^2 + yx - y^2)a + (x^3 - 3y^2x - 2y^3)\} \\ &= x\{(x+y)a^2 + (x+y)(2x-y)a + (x+y)(x^2 - yx - 2y^2)\} \\ &= x(x+y)\{a^2 + (2x-y)a + (x+y)(x-2y)\} \\ &= x(x+y)(a+x+y)(a+x-2y) \end{aligned}$$

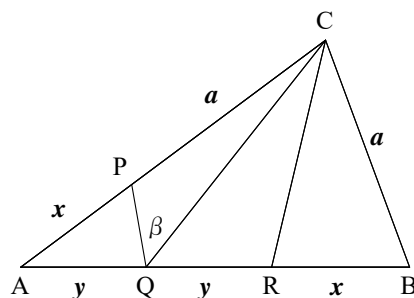
また、 $x = b - a, y = \frac{1}{2}(a - b + c)$ なので,

$$a + x - 2y = a + (b - a) + \frac{1}{2}(a - b + c) = 2b - a - c$$

よって、 $\Delta$ の符号は、 $a + x - 2y = 2b - a - c$ に一致する。

したがって,

$$\beta \text{は鋭角} \Leftrightarrow PQ^2 + CQ^2 - CP^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow a + c < 2b$$



(性質4)  $\alpha$ は鋭角である。

(証明)

$$AD = AF + FD = a + y > CD \text{ より,}$$

$\angle ADC$  の二等分線が辺  $AC$  と交わる点を  $P$  とすれば,

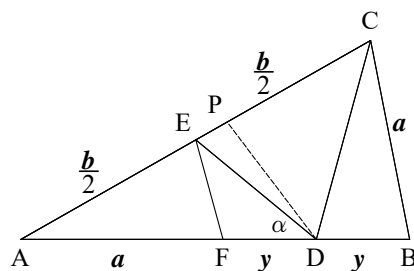
$$\frac{AP}{PC} = \frac{AD}{CD} > 1$$

であり, 点  $E$  は辺  $AC$  の中点だから,

点  $E$  は線分  $AP$  上にある。

したがって,

$$\alpha < \angle ADP = \frac{1}{2} \angle ADC < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

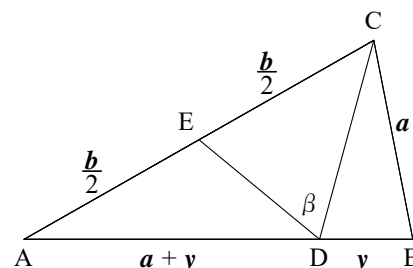


(性質5)

$$\beta \text{ は鋭角} \Leftrightarrow c < 3a$$

(証明)

$$\begin{aligned} DE^2 &= (a+y)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2(a+y)\frac{b}{2}\cos A \\ &= \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(a + \frac{c-a}{2}\right)\frac{b}{2} \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \\ &= \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\frac{c+a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{1}{4c} \left\{ c(a+c)^2 + cb^2 - (c+a)(c^2 + b^2 - a^2) \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} CD^2 &= y^2 + a^2 - 2ya\cos B \\ &= \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2 - 2\left(\frac{c-a}{2}\right)a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{1}{4c} \left\{ c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) \right\} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &4c(DE^2 + CD^2 - CE^2) \\ &= c(a+c)^2 + cb^2 - (c+a)(c^2 + b^2 - a^2) \\ &\quad + c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) - cb^2 \\ &= 3a^3 + 5a^2c + ac^2 - c^3 - 3ab^2 + b^2c \\ &= (3a-c)(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) \\ &= (3a-c)(a+b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\beta \text{ は鋭角} \Leftrightarrow DE^2 + CD^2 - CE^2 > 0 \Leftrightarrow c < 3a$$

(性質6)

$$\gamma \text{は鋭角} \Leftrightarrow a^2 + ac < b^2$$

(証明)

$$CD^2 = \frac{1}{4c} \{ c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) \}$$

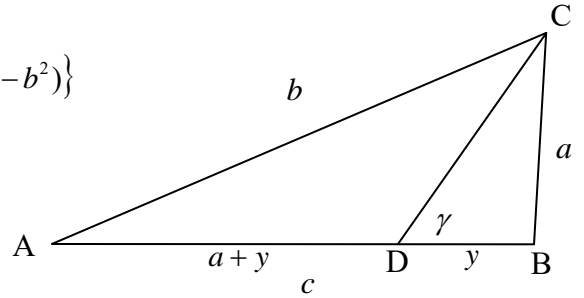
$$BD^2 = (c-y)^2 = \left( c - \frac{c-a}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(c-a)^2$$

より,

$$\begin{aligned}
& 4c(CD^2 + BD^2 - BC^2) \\
&= c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) \\
&\quad + c(c-a)^2 - 4ca^2 \\
&= (c-a) \{ 2c(c-a) - 2(a^2 + c^2 - b^2) \} \\
&= 2(c-a)(-a^2 + b^2 - ac)
\end{aligned}$$

したがって,

$$\gamma \text{は鋭角である} \Leftrightarrow CD^2 + BD^2 - BC^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 + ac < b^2$$



また, 性質2と同様にして,

$$a^2 + ac < b^2 \Leftrightarrow \sin \frac{2A-B}{2} < 0 \Leftrightarrow 2A < B$$

[5] 「展開図」を組み立てることが出来ない限界条件について

組み立て可能条件から, 組み立てることができない限界の条件

$$c = 3a$$

$$a^2 + ac = b^2$$

$$a + c = 2b$$

のそれぞれについて, 条件を満たす三角形の形状を初等幾何学的方法で調べた結果を, 次の補足1, 補足2, 補足3に示した。

(補足1)

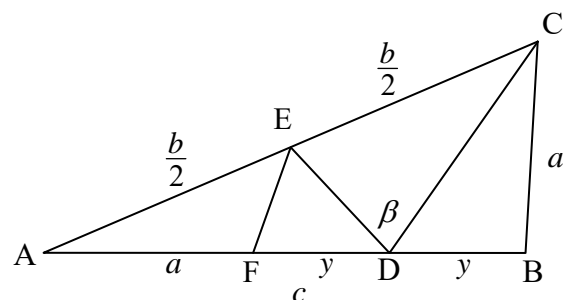
右図において, 「 $\beta$ は鋭角  $\Leftrightarrow c < 3a$ 」

であり, 性質5の証明を見ればわかるように,

$$\beta \text{は直角} \Leftrightarrow c = 3a$$

である。

そこで,  $a:c=1:3$  のときに  $\beta=90^\circ$  であることを初等幾何で確認する。





線分 AE の中点を T とすれば,

$$CT : TA = BC : BA = 1 : 3$$

であるから, 直線 BT は  $\angle B$  を二等分する。

さらに, 仮定より,

$$BC = \frac{1}{3}AB = BD$$

であるから,

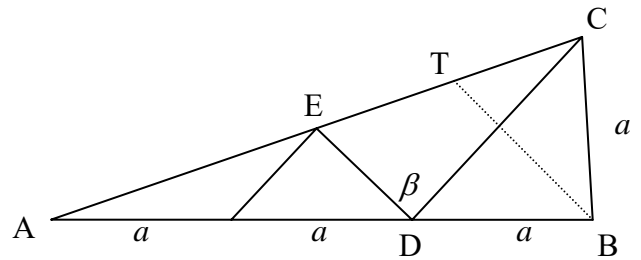
$$CD \perp BT$$

ここで,

$$BT \parallel DE$$

であるから,

$$CD \perp DE$$



### (補足 2)

性質 2 と性質 6 では, 不等号の向きが異なるだけの式が出てくる。

そこで,  $a^2 + ac = b^2$  について調べることで, 性質 2 と性質 6 の関連を調べる。

$a^2 + ac = b^2$  を満たすときの  $\triangle ABC$  の形状を調べる。

性質 6 によれば, このとき  $\gamma = 90^\circ$  である。

性質 2 の証明の後半と同様にして,

$$c = a + 2a \cos B$$

であり, 頂点 A から B に下ろした垂線を CD とするとき,

$$BD = a \cos B$$

であるから,

「 $CB = CF$  を満たす点 F を辺 AB 上にとれば,

$$BC = CF = FA = a$$

を得る。この条件を満たすとき,

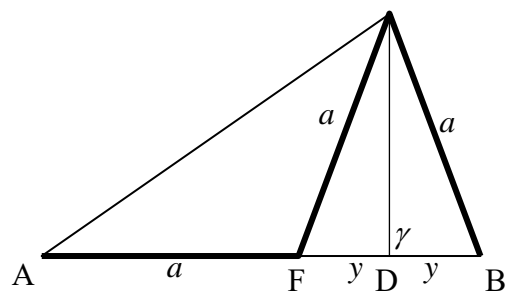
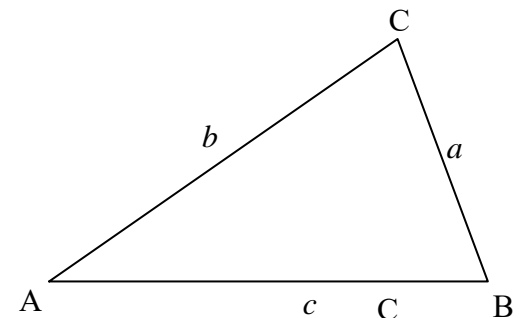
$\triangle ACB$  は  $\Lambda$  三角形である

と呼ぶことにする。

容易にわかるように,

$$\triangle ACB \text{ が } \Lambda \text{ 三角形} \Leftrightarrow 2\angle A = \angle B$$

である。



一方,  $a^2 + ac = b^2 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{c-x}{b}$  であるから,

これは, 直線 CR が  $\angle C$  の二等分線になる条件である。

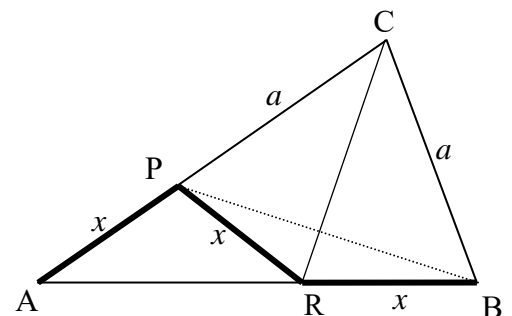
$CB = CP$  を考慮すれば,

$$AP = PR = RB = x$$

よって,

$$a^2 + ac = b^2 \Leftrightarrow \triangle BPA \text{ は } \Lambda \text{ 三角形}$$

以上のことから,



$$\triangle ACB \text{ が } \Lambda \text{ 三角形} \Leftrightarrow a^2 + ac = b^2 \Leftrightarrow \triangle BPA \text{ は } \Lambda \text{ 三角形}$$

であることがわかる。

次のような、別証もある。

$$\triangle ACB \text{ が } \Lambda \text{ 三角形} \Leftrightarrow \triangle BPA \text{ は } \Lambda \text{ 三角形}$$

$\triangle ACB$  が  $\Lambda$  三角形のとき、  
 $\angle A = 2t$  とおけば、 $\angle B = 4t$  であり、二等辺三角形  $CBP$  の底角は  $3t$  に等しい。  
 よって、 $\angle PBA = t$  となり、  
 $2\angle PBA = \angle PAB$   
 したがって、 $\triangle BPA$  は  $\Lambda$  である。(逆の証明は省略する)

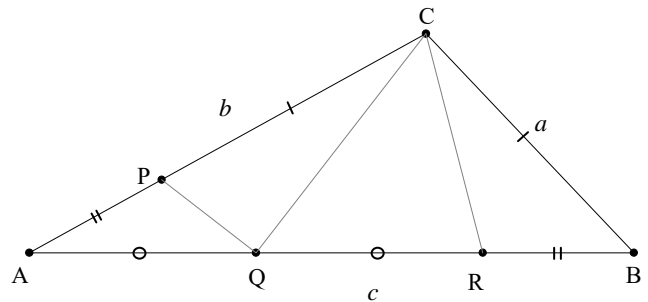
(補足 3)

$\triangle ABC$  で、3 辺を  $a, b, c$  とし、辺上の点  $P, Q, R$  を次の条件を満たすようにとる。

$$CP = CB, BR = AP, AQ = QR.$$

このとき、次の 3 条件は同値である。

1.  $a + c = 2b$
2.  $\angle PQC = 90^\circ$
3.  $\angle ACB = 2\angle QCR$



(1  $\Rightarrow$  2 の証明)

$$c - b = b - a \text{ であるから,}$$

$$AR = AC = b$$

よって,

$$\angle ARC = \angle ACR$$

点  $Q$  に関する点  $P$  の対称点を  $P'$  とすれば、 $\triangle APQ \equiv \triangle RP'Q$  (2 辺挟角) より、

$$P'R = PA = RB$$

$$\angle CRP' = \angle ARC + \angle ARP = \angle ACR + \angle RAC = \angle CRB$$

よって,

$$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB \text{ (2 辺挟角)}$$

これより,

$$CP' = CB = CP$$

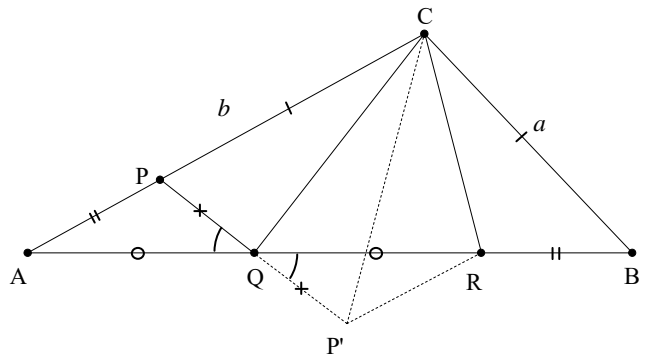
そうすると,

$$\triangle CQP' \equiv \triangle CQP \text{ (3 辺相等)}$$

であるから,

$$\angle CQP' = \angle CQP$$

よって、 $\angle PQC = 90^\circ$  を得る。



(2 ⇒ 3 の証明)

直線 CQ に関する点 P の対称点を P' とすると、

$$\angle QCA = \angle QCP' \quad \dots \textcircled{1}$$

$$CP' = CP = CB$$

また、 $\angle PQC = 90^\circ$  より、点 P' は点 Q に関する点 P の対称点であるから、

$$P'R = PA = RB$$

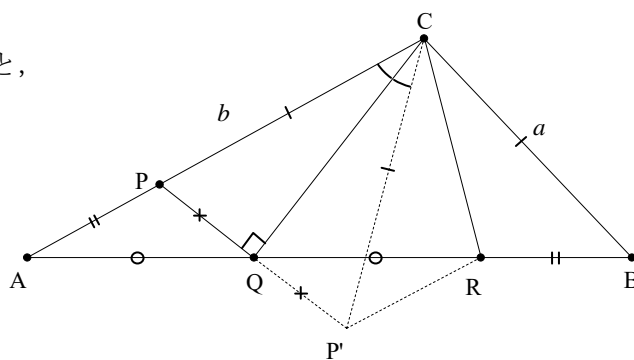
よって、

$$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB \quad (3 \text{ 辺相等})$$

これより、

$$\angle RCP' = \angle RCB \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $\angle ACB = 2\angle QCR$  を得る。



(3 ⇒ 1 の証明)

直線 CQ に関する点 P の対称点を P' とすると、

$\angle ACB = 2\angle QCR$  より、

$$\angle P'CR = \angle BCR$$

また、

$$CP' = CP = CB$$

よって、

$$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB \quad (2 \text{ 辺挟角})$$

これより、

$$\angle CRP' = \angle CRB$$

$$RP' = RB = AP$$

よって、

$$\triangle APQ \equiv \triangle RP'Q \quad (3 \text{ 辺相等})$$

これより、

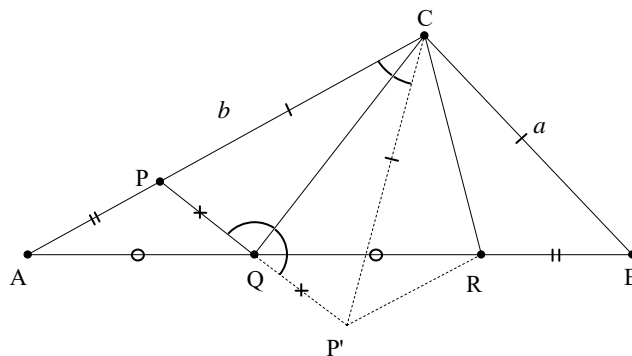
$$\angle CRQ = \angle CRP' - \angle QRP' = \angle CRB - \angle QAP = \angle ACR$$

したがって、

$$AR = AC$$

よって、

$$c = AR + RB = AC + AP = b + (b - a)$$



2008 / 12 / 24

大阪教育大学附属高等学校池田校舎 友田 勝久  
愛知県立春日井東高等学校 堀部 和経