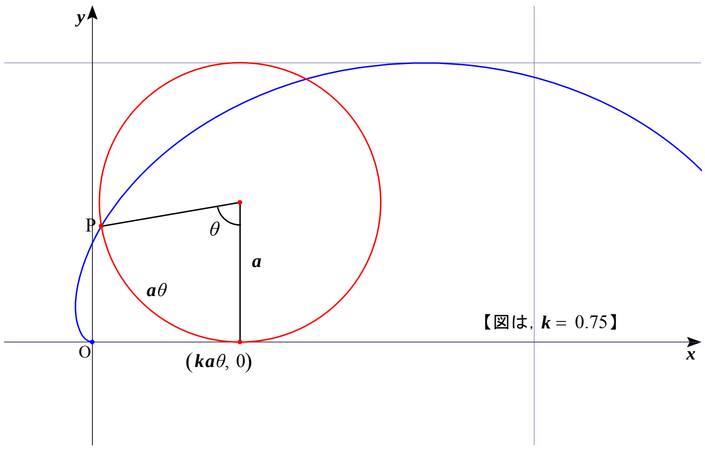
Skid Cycloid ; Trochoid



直線上を動円が滑らないで回転するとき、動円上の点Ｐの描く曲線は Cycloid である。

滑りサイクロイド

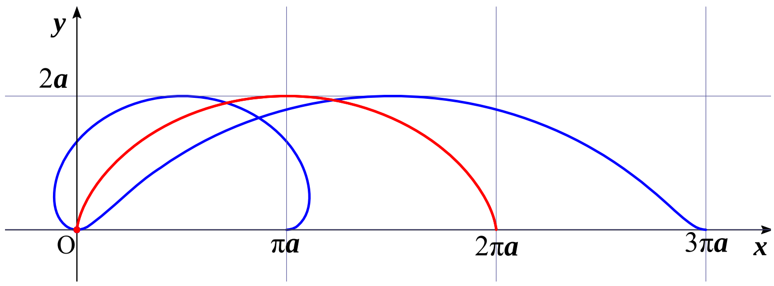
ここでは，回転にともなって常に一定の滑りがある場合について動円上の点Ｐの描く曲線を考えて見よう。これを滑りサイクロイドと呼ぶことにする。

はじめ x 軸に原点で接している半径 a の円を考える。その円が角 θ だけ回転したとき，原点と重なっていた点Ｐの回転後の座標をＰ(x, y)とおく。転がった円弧の長さは$a\theta$であるので，x 軸と円の接点は、$(ka\theta, 0)$（滑り係数 coefficient of skid を，k とした）となる。したがって，

$$x = ka\theta - a\sin\theta \quad , \quad y = a - a\cos\theta$$

となる。$k = 0.5, 1, 1.5$ の場合の曲線を図示すると，次の図のようになる。

さて x 軸とこの曲線C（$0 \le \theta \le 2\pi$）で囲まれた部分の面積S(k)を求めてみよう。まず，



$$\frac{dx}{d\theta} = ka - a\cos\theta$$

である。よって，

$$S(k) = \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(k-\cos\theta)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left\{k-(k+1)\cos\theta+\cos^2\theta\right\}d\theta = a^2\int_0^{2\pi}\left\{\frac{2k+1}{2}-(k+1)\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right\}d\theta$$

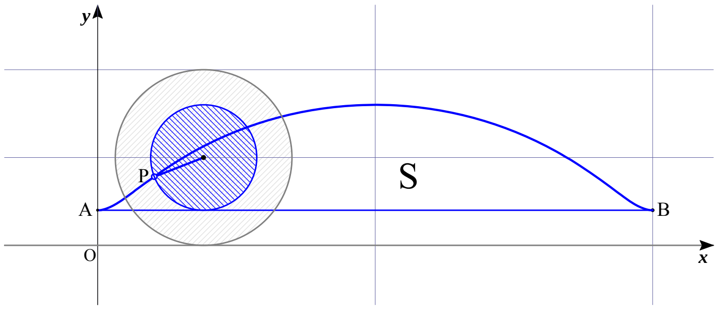
$$= a^2\left[\frac{2k+1}{2}\theta-(k+1)\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = (2k+1)\pi a^2 = (2k+1)S$$

ただし，元の円の面積をＳとした。したがって，上図の場合の面積はそれぞれ，

$$S(0.5) = 2S\,, \quad S(1) = 3S\,, \quad S(1.5) = 4S$$

となる。

Trochoid と Skid Cycloid は同じ曲線



実際、Trochoid $\mathrm{P}(x, y)$を,

$$x = p\theta - q\sin\theta$$
$$y = r - q\cos\theta$$

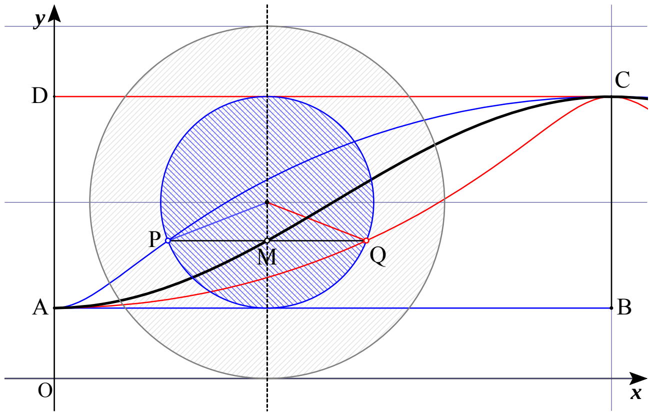
とすれば, $q = a$, $p = ka$, $r = a$

であれば，明らかに一致している。よって，

$$\mathrm{S} = S(k) = (2k+1)\pi a^2 = (2\frac{p}{q}+1)\pi q^2 = \pi(2pq+q^2)$$

となる。

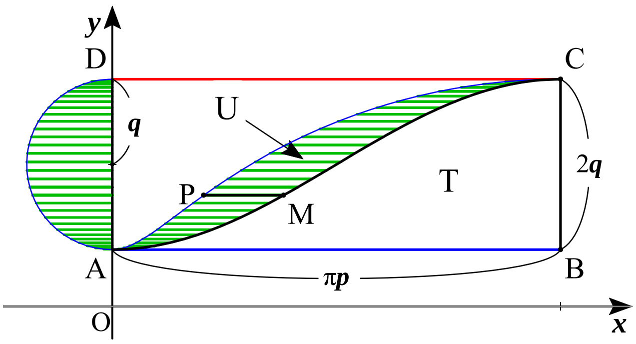
面積の別アイデア



この結果は，微分積分を利用しないで求めることが出来る。

円の中心を通り y 軸に平行な直線に関して，点 P と対象な点を Q とする。

線分 PQ の中点 M を考える。この定義により，点 M の描く曲線（随伴線と呼ばれている）は，四角形 ABCD の中央で点対称になっている。つまり、点 M の描く曲線は、長方形 ABCD の面積を二等分する。したがって、面積 T は,



$$T = \frac{1}{2}\square ABCD = \frac{1}{2}\times\pi p\times 2q = \pi pq$$

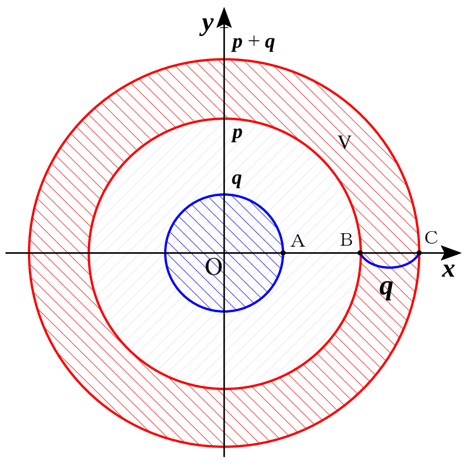
となる。右図のUの部分の面積は，半径 q の円の面積の半分であるので、

$$U = \frac{1}{2}\pi q^2$$

となる。よって,

$$S = 2(T+U) = 2\left(\pi pq + \frac{1}{2}\pi q^2\right) = \pi\left(2pq+q^2\right)$$

この面積と同じ面積の図形



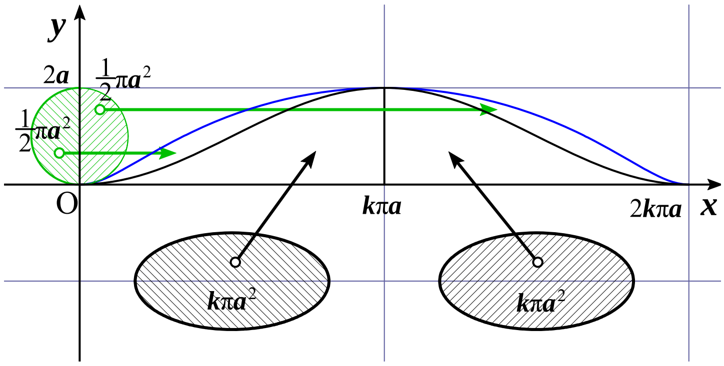
２円 A，B の半径は，それぞれ q, p である。この２円はトロコイドを作るための２円である。さらに、円Ｂの外側に，半径 $p+q$ の円Ｃをかく。このとき、円Ｃと円Ｂの間の部分の面積を V とすると,

$$V = \pi(p+q)^2 - \pi p^2 = \pi\left(2pq+q^2\right)$$

となり，Trochoid の面積に一致する。（何か初等的な説明？）

その２

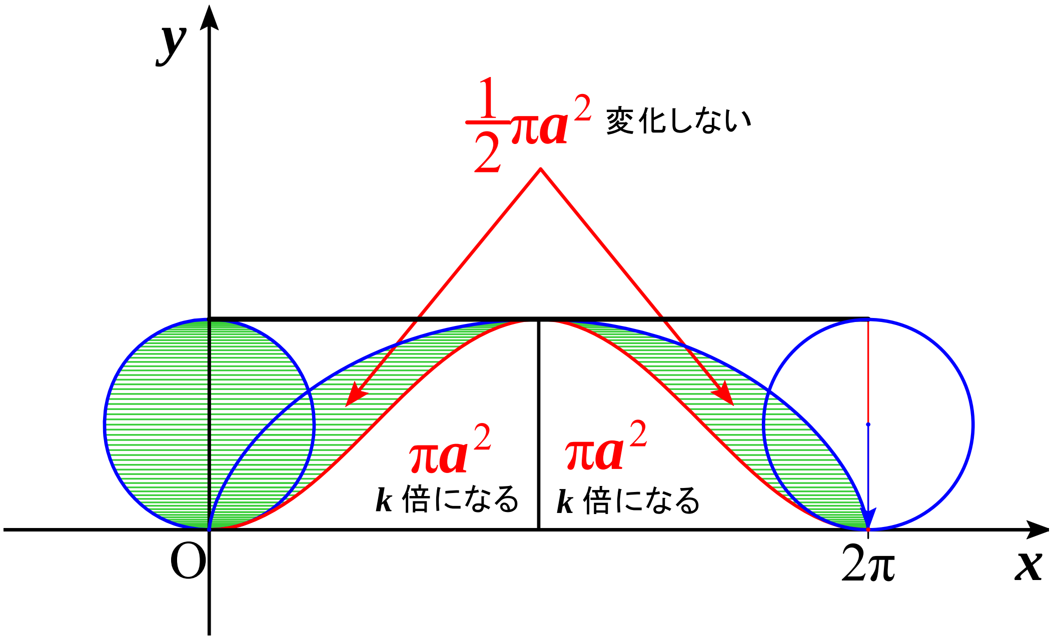
滑りサイクロイドの記号を用いると，右の図のようになり、面積 S の式の解釈が次の様にできる。



左半分の部分について，滑りサイクロイドと随伴線の間の面積は，$\dfrac{1}{2}\pi a^2$ であり，随伴線と x 軸の間の面積は，長軸（横軸）$2ka$，短軸（縦軸）$2a$ の楕円の面積 $k\pi a^2$ に等しい。右半分も同様なので，

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\pi a^2 + k\pi a^2\right) = \pi a^2 + 2k\pi a^2 = (2k+1)\pi a^2$$

となる。



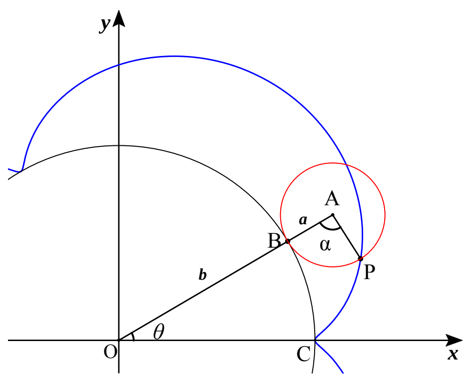
また，滑るのではなく、普通のサイクロイドで考えると，もともと楕円の面積 $k\pi a^2$ ではなく円の面積 πa^2 を考えていた。つまり、滑りサイクロイドの生成円が x 軸方向に滑る（ Skid する ）ことにより、円が横方向に k 倍に伸び、円が楕円になりその面積は $k\pi a^2$ となることより、容易に滑りサイクロイドの面積の式を理解できる。

おまけ

Skid Epitrochoid (Hypotrochoid)

定円周上を動円が滑らないで回転するとき、動円上の点Ｐの描く曲線は Trochoid（円の半径が同一の場合は Cardioid）である。

ここでは、回転にともなって常に一定の滑りがある場合について動円上の点Ｐの描く曲線を考えてみよう。



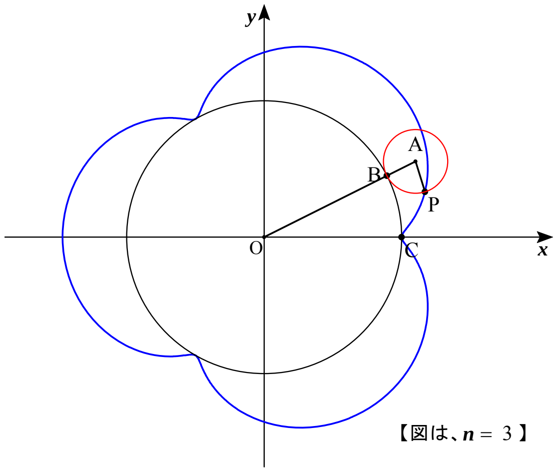
　はじめ半径aの動円上の点Ｐが、半径bの円に点Ｃで接している。図のように∠ＢＯＣ＝θとし、点Ｐの回転後の座標を

Ｐ(x, y)とおく。弧ＢＣの長さと弧ＢＰの長さは、それぞれ$b\theta, a\alpha$ であるので、滑り係数をkとすれば、

$$b\theta = k a\alpha \quad ・・・①$$

となる。また、動円が定演に対してn周したとき，点Ｐが点Ｃに一致するものとする。すると，

$$b\times 2\pi = n k a\times 2\pi \quad ・・・②$$



【図は、$n=3$】

となるので，①，②より$\alpha = n\theta$である。ここで、滑り係数kは，二つの半径a, bに回転数nに関連して決まることに注意。よって，

$$x=(a+b)\cos\theta - a\cos(n+1)\theta \quad , \qquad y=(a+b)\sin\theta - a\sin(n+1)\theta$$

となる。したがって，$\dfrac{dx}{d\theta} = -(a+b)\sin\theta + a(n+1)\sin(n+1)\theta$　なので，

$$-y\frac{dx}{d\theta} = -\{(a+b)\sin\theta - a\sin(n+1)\theta\}\{-(a+b)\sin\theta + a(n+1)\sin(n+1)\theta\}$$

$$=(a+b)^2\sin^2\theta + (n+1)a^2\sin^2(n+1)\theta - (n+2)a(a+b)\sin(n+1)\theta\sin\theta$$

$$=(a+b)^2\frac{1-\cos 2\theta}{2} + (n+1)a^2\frac{1-\cos 2(n+1)\theta}{2} + \frac{1}{2}(n+2)a(a+b)\{\cos(n+2)\theta - \cos n\theta\}$$

よって，この曲線Ｃで囲まれた部分の面積をＳとすると，$\mathrm{S} = \int_0^{2\pi}\left(-y\dfrac{dx}{d\theta}\right)d\theta$である。

$$\mathrm{S} = \left[\frac{1}{2}(a+b)^2\theta + \frac{1}{2}(n+1)a^2\theta\right]_0^{2\pi} = \pi\left\{(a+b)^2 + (n+1)a^2\right\}$$

である。

　ここで，$a=b, n=1$ $(k=1)$ならば$\mathrm{S}=6\pi a^2$となり，通常の Cardioid の面積が求まる。

愛知県立春日井東高等学校　　数学科　　堀部和経（ほりべかずのり）　　２０１５／１２／２６