ピタゴラス数のお話

愛知県立春日井東高等学校
堀部　和経

３辺の長さが３，４，５の三角形は，直角三角形です。ピタゴラス数とは，このように直角三角形の３辺の長さがすべて正の整数値である数の組のことです。

どの２つも互いに素であるような（既約）ピタゴラス数 x, y, z をすべて決定する。

> $x^2+y^2=z^2$ ，$(x,y)=1$，$(y,z)=1$，$(z,x)=1$，の正の整数解は，
> $\{x,y\}=\{m^2-n^2,\ 2mn\}$ ， $z=m^2+n^2$ である。
> 但し $(m,n)=1$，$m>n$ ，m,n の一方は偶数で他方は奇数である。（偶奇は異なる）

まず証明の準備として，次を示す。

「x, y の一方は奇数で他方は偶数である。」 ………(α)

［証明］ $(x,y)=1$ より，x,y は互いに素だから，両方とも偶数ということはない。

今，x,y 共に奇数であると仮定する。

つまり，$x=2k-1, y=2l-1$（$k,l\in N$）と書けるので，

$$z^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=4(k^2+l^2-k-l)+2$$

となる。ところで，$z=2p$ または $z=2p-1$（$p\in N$）なので

$$z^2=4p^2 \text{ または } z^2=4(p^2-p)+1$$

となり矛盾する。　［証明終わり］

では、本題の［証明］です。

(α) より，一般性を失うことなく x を奇数，y を偶数とおける。

すると，$z^2=x^2+y^2$ から z は奇数となる。また，

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y) \cdots\cdots\cdots ①$$

と変形でき z は奇数，y は偶数であるので，$z+y$，$z-y$ は共に奇数である。

今，$z+y$，$z-y$ に（１以外の）共通因数 p（かならず奇数である）があるとすると，

$$2z=(z+y)+(z-y) \quad , \quad 2y=(z+y)-(z-y)$$

は共に奇数 p の倍数となることから，p は z と y の共通因数となり，$(y,z)=1$ に矛盾する。

したがって，$z+y$，$z-y$ は２つとも（１以外の）共通因数を持たない奇数である。

すると①式から，$z+y$ と $z-y$ は，それぞれ独立に平方数でなくてはならない。つまり，

$$z+y=k^2 \quad , \quad z-y=l^2 \quad (k, l \text{ は共に奇数，} (k,l)=1 \text{ ，} k>l) \cdots\cdots\cdots ②$$

とおける。今，

$$m=\frac{k+l}{2} \quad , \quad n=\frac{k-l}{2}$$

とおくと， m, l は自然数で $m > n$ である。そして，次の式を得る。

$k = m + n$，$l = m - n$ （$m + n = k$ ：奇数より，m, n の偶奇は異なる。）

したがって，

$$z = \frac{1}{2}\{(z+y)+(z-y)\} = \frac{1}{2}\{k^2 + l^2\} = \frac{1}{2}\{(m+n)^2 + (m-n)^2\} = m^2 + n^2$$

$$y = \frac{1}{2}\{(z+y)-(z-y)\} = \frac{1}{2}\{k^2 - l^2\} = \frac{1}{2}\{(m+n)^2 - (m-n)^2\} = 2mn$$

となり，①式に代入し

$$x^2 = z^2 - y^2 = (m^2+n^2)^2 - (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 - n^2)^2$$

つまり，$x = m^2 - n^2$ を得る。

最後に，$(m, n) = c\ (>1)$ とすると，$k = m + n$，$l = m - n$ より k, l は共通因数 c を持つ。これは，$(k, l) = 1$ に矛盾する。よって，$(m, n) = 1$ ［証明終わり］

（注）正の整数の組 (m, n) に対して，（既約）ピタゴラス数 $\{x, y\}; z$ が１組対応

m, n が小さな値の時のピタゴラス数の表を作りました。参考にしてください。 資料１

ところで，古代バビロニアから出土した粘土板には，楔形文字で 12709,13500,18541 というピタゴラス数が書いてあるそうです。これは，$m = 125, n = 54$ に対する x, y, z の値になっています。すごい計算力（？）ですね。 （足立恒夫「フェルマーの大定理」より）

［補足１］ ここで求めたピタゴラス数の<u>式の形</u>は，次のように簡単に見つけらます。

$x^2 + y^2 = z^2$ から，$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ と変形し，$\frac{x}{z} = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\frac{y}{z} = \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ とおけるので，$(1-t^2)^2 + (2t)^2 = (1+t^2)^2$ となる。実数 t を２つの整数 $m, n\ (m \neq 0)$ で $t = \frac{n}{m}$（有理数）

とおけば，$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^2 + \left(2\frac{n}{m}\right)^2 = \left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)^2$ から，$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$ となる。

よってピタゴラス数 $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ （m, n は任意の整数）を得る。

［補足１^2］この結果は古くから知られていて，すでに６００年ころ Brahmagupta が与えています。（岩波数学事典第２版 276 ページ）