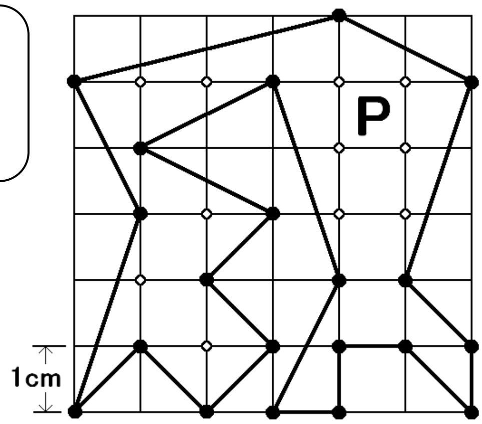
# ピック（Pick）の定理

［問題０］　図形Ｐの面積は，何$cm^2$でしょうか。

ただし，正方格子の１辺を$1cm$とする。

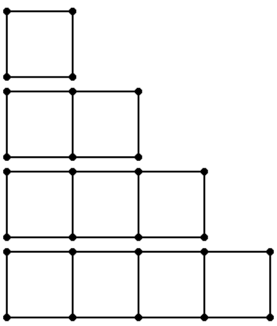



［解］

※　格子点を線分で結んでできる図形のことを、**格子多角形**と呼びます。

［問題１］　面積Ａ（Area）と境界にある格子点の数Ｂ（Boundary）を記入してから，
　　Ｂを代入するとＡに等しくなる式を考えてみよう。

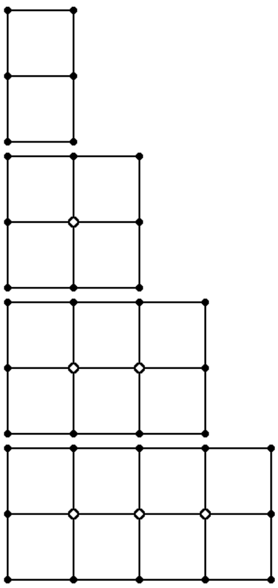
(1)
(2)
(3)
(4)



| No | A | B | A＝（Ｂの式？） |
|---|---|---|---|
| (1) | | | |
| (2) | | | |
| (3) | | | |
| (4) | | | |

［問題２］　面積Aと境界にある格子点B，内部の格子点の数Ｉ（Ｉｎｎｅｒ）を記入しよう。

(1)
(2)
(3)
(4)



| No | A | B | I | A＝（ＢとＩの式？） |
|---|---|---|---|---|
| (1) | | | | |
| (2) | | | | |
| (3) | | | | |
| (4) | | | | |

さらに，ＢとＩを代入するとＡに等しくなる式を考えてみよう。

ピックの定理（1899 Georg Alexander Pick）

格子多角形Ｐの面積Ａは，境界上の格子点の個数Ｂと内部の格子点の数Ｉを用いて，次の式で表される。

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\mathrm{B}+\mathrm{I}-1 \qquad \mathrm{A_P}=\frac{1}{2}\mathrm{B_P}+\mathrm{I_P}-1 \text{ とも書く}$$

さあ、ピックの定理を証明しよう。･･･しかし、その前に、･･･

*pick* 関数の加法性

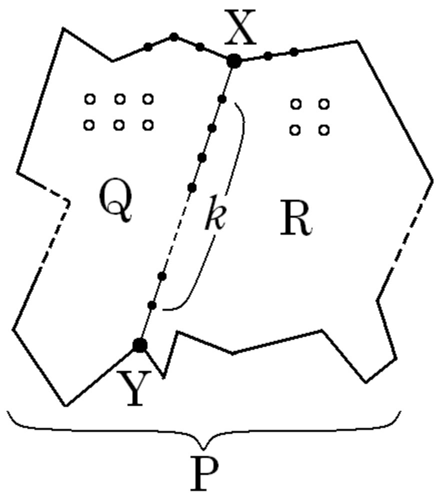
格子多角形Ｐに対し次のような $pick(\mathrm{P})$ 関数を考える。すると、この関数は格子多角形に対して加法性がある。

$$pick(\mathrm{P})=\frac{1}{2}\mathrm{B_P}+\mathrm{I_P}-1 \qquad \text{（Ｐの } pick \text{ 値と呼ぶ）}$$

*pick* 関数の格子多角形に対する加法性とは

ある格子多角形Ｐが、２つの格子点 X,Y を結ぶ線分で、２つの格子多角形ＱとＲに分割出来るとき、次の等式が成り立つことである。

$$pick(\mathrm{P})=pick(\mathrm{Q})+pick(\mathrm{R})$$




［証明］

境界上の格子点を数えることで次の等式を得る。

$$\mathrm{B_P}=\mathrm{B_Q}+\mathrm{B_R}-2(k+1)$$

また、内部の格子点を数えて次を得る。

$$\mathrm{I_P}=\mathrm{I_Q}+\mathrm{I_R}+k$$

したがって、

$$pick(\mathrm{P})=\frac{1}{2}\mathrm{B_P}+\mathrm{I_P}-1=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{B_Q}+\mathrm{B_R}-2(k+1)\right\}+\left\{\mathrm{I_Q}+\mathrm{I_R}+k\right\}-1$$

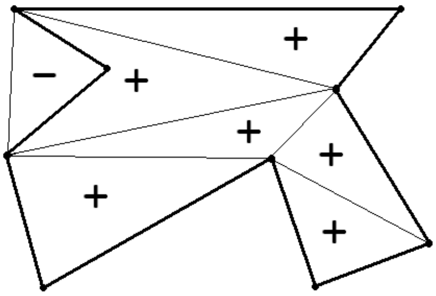
$$=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{B_Q}+\mathrm{B_R}\right\}+\left\{\mathrm{I_Q}+\mathrm{I_R}\right\}-2$$

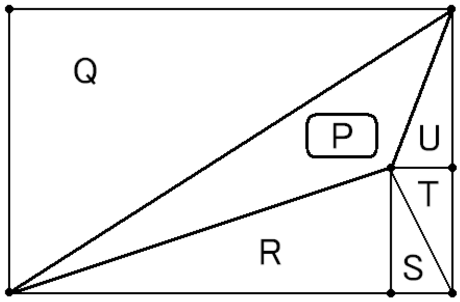
$$=\left\{\frac{1}{2}\mathrm{B_Q}+\mathrm{I_Q}-1\right\}+\left\{\frac{1}{2}\mathrm{B_R}+\mathrm{I_R}-1\right\}=pick(\mathrm{Q})+pick(\mathrm{R})$$

［証明終わり］

格子多角形の *pick* 値は、単位正方形の *pick* 値から、(加法的に) 計算できる。

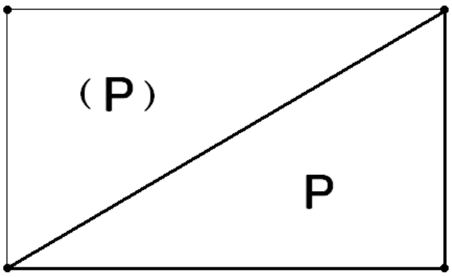
［証明］

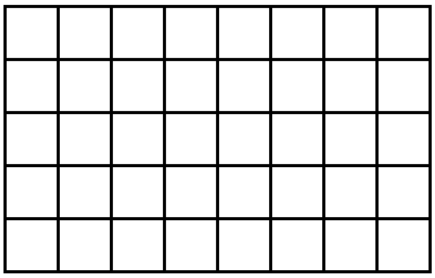



⑴ 格子多角形の *pick* 値は、三角形の *pick* 値の和（または差）で表すことができる。

⑵ 三角形Ｐの *pick* 値は、格子線に平行な２辺を持つ直角三角形（右上図の例ではＱ～Ｕ）と格子線に平行な辺をもつ長方形の *pick* 値との和（または差）で表される。



⑶ 格子線に平行な２辺を持つ直角三角形Ｐの *pick* 値は、格子線に平行な辺をもつ長方形の *pick* 値の$\frac{1}{2}$であり加法性を持つ。

⑷ 長方形の *pick* 値は、単位正方形の *pick* 値の和で表される。

［証明終わり］

以上で、証明の準備が整いました。つまり、単位正方形Ｓの *pick* 値が面積に等しいのなら、加法性よりすべての格子多角形の *pick* 値も面積に等しい。

明らかに、単位正方形をＳとすると、$\mathrm{B_S}=4$、$\mathrm{I_S}=0$ である。したがって、


$pick(\mathrm{S})=\frac{1}{2}\times4+0-1=1$ と面積と等しい。

［おまけの問題３］　$a=\sqrt{5}, b=\sqrt{10}, c=\sqrt{13}$ である△ＡＢＣの面積$S$を求めよ。

(アイデア１)「ヘロンの公式」

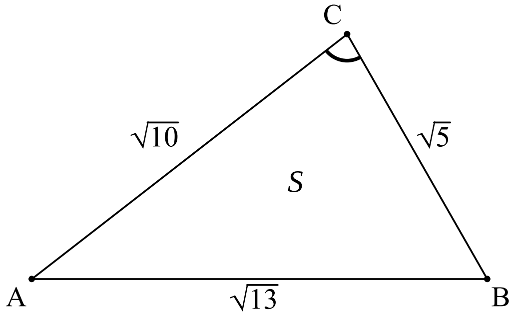
$s=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}$ とおき、$S=\sqrt{s(s-\sqrt{5})(s-\sqrt{10})(s-\sqrt{13})}$ を計算･･･メンドウ！！(>_<)

(アイデア２)「余弦定理」

$\cos C=\dfrac{5+10-13}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$ より、

$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{49}}{50}=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$

したがって、$S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\dfrac{7}{5\sqrt{2}}=\dfrac{7}{2}$ を得る。

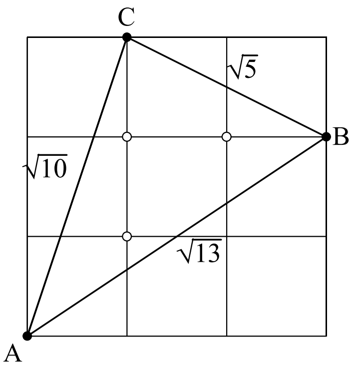



(アイデア３)「ピックの定理」

$a=\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}, b=\sqrt{10}=\sqrt{1^2+3^2}, c=\sqrt{13}=\sqrt{2^2+3^2}$

であることから、右の図のように格子点上に各頂点をおけば、

$\mathrm{B}=3, \mathrm{I}=3$ であるので、$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3+3-1=\dfrac{7}{2}$



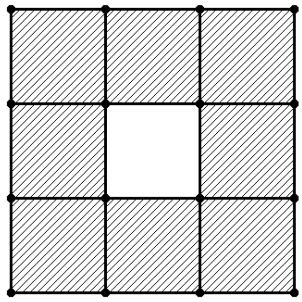

【このようなアイデアで、「先生」は問題を作ったりしているのでしょうね。(^_^)v 】

［おまけの問題４（注意)］　右図のような面積が ８ の図形（斜線の部分）についてピックの定理を適用してみよう。

$\mathrm{B}=16, \mathrm{I}=0$ であるので、$S=\dfrac{1}{2}\cdot 16+0-1=7$ となりピックの定理は成り立たない。その理由は、加法性の説明で

$\boxed{\text{格子点を結ぶ線分で、２つの格子多角形分割出来るとき、}}$

という条件の下で証明しました。格子多角形に「穴」がある時はこの条件を満たさないので、ピックの定理が成り立ちません。



［おまけの問題５（Present)］格子点上の３点を結んで正三角形を作ることは可能でしょうか？

ピックは、1859 年 にオーストリアのウィーンで生まれたユダヤ人で、1942 年テレジーン強制収容所で亡くなった。アインシュタインとは友人であり、科学的興味だけではなく、ともにバイオリンを愛し、他の研究者とカルテットを組んで演奏を楽しんだりした。また、ピックは、アインシュタインに相対性理論を一般化するにあたっての重要なアドバイスをしたことでも知られている。

春日井東高校　堀部和経　（２０１０／９）