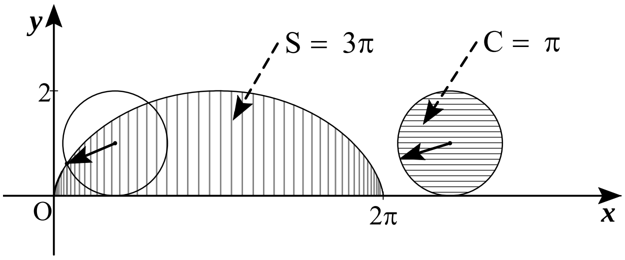
「円とサイクロイド下の面積の比は１：３」の意味について



半径１の円の面積を C とし，その円がつくるサイクロイドと x 軸の間の面積を S とする。

ここでは，これをサイクロイド下の面積と呼ぶことにする。

このとき，$\mathrm{C}=\pi$，$\mathrm{S}=3\pi$ であることは，よく知られている。

マミコン（Mamikon）の定理　（ここでは，証明なしで使用する。）

「接線掃過領域の面積」と「それに対する接線団の面積」は等しい。

比が１：３って？　どういう事なんだろう？　⇐　「本題」

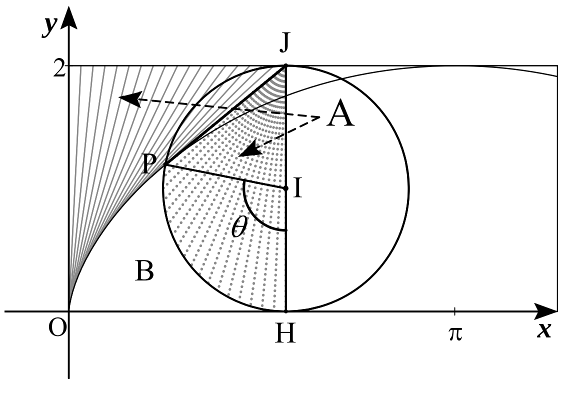
マミコンの定理を使って，サイクロイド下の面積を考えて見る。

接線掃過領域の面積と，それに対する接線団の面積は，共に A である。

接線団の面積 A は，中心角 θ の扇形 PHI と二等辺三角形 IJP の面積の和であるから，

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\left(\theta+\sin\theta\right)$$

となる。

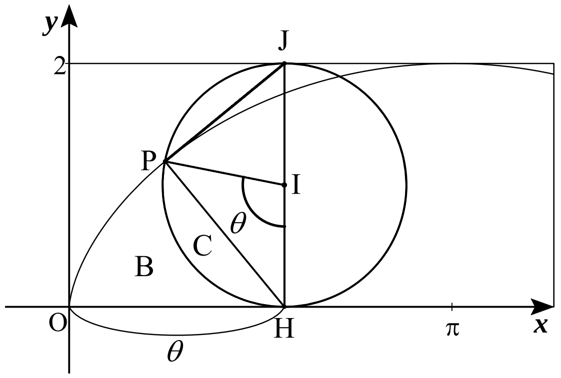


図形 POH の面積を B とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=2\times\theta-2\,\mathrm{A}\\&=2\theta-\left(\theta+\sin\theta\right)\\&=\theta-\sin\theta\end{aligned}$$

である。

弓形 PH の面積を C とし，扇形 PHI から二等辺三角形 IPH を引き，



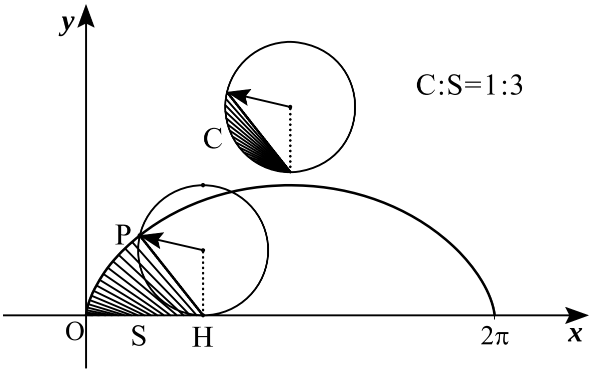
$$C=\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)$$

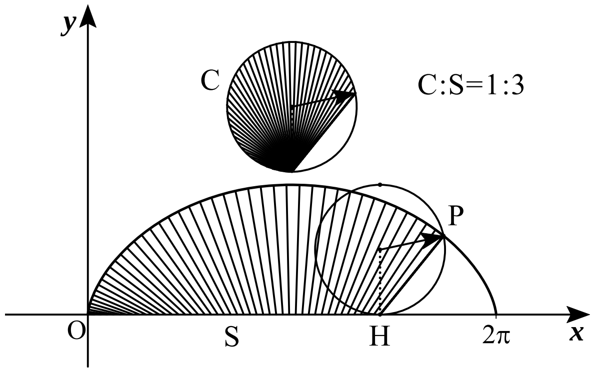
となる。よって，B=2C となる。

したがって，線分 PH の掃過領域の面積を S とすると，

$$S=B+C=2C+C=3C$$

となる。





これは，$0\leq\theta\leq\pi$ の範囲だけではなく $0\leq\theta\leq2\pi$ の範囲で成り立つ。

まとめ

常に，線分 PH の掃過領域の面積 S は，弓形 PH の面積 C の３倍である。したがって，円とサイクロイド下の面積比が１：３なのは，至極当然でした。

マミコンの定理(1981 Mamikon A. Mnatsakanian)は，アルメニアの雑誌にロシア語で書かれた。

彼の専門は物理学で，ソビエト連邦から米国・カリフォルニアに訪れ地震学を研究している間にソビエト連邦が崩壊し，米国に取り残された。

※参考文献　　　「Aha!　ひらめきの幾何学」共立出版　より

2017/05/25 堀部　和経