「虚数 ・ ことはじめ」　　　カルダノ　と　ボンベリ　を通して

となる数，つまり虚数単位  は，数学の歴史の中でどのように見つけられたのか，・・・。また，誰が「虚数」という概念を発見したかを紹介したいと思います。

　歴史上のすべてを紹介するなんて無理ですから，カルダノとボンベリという２人の数学者を通して虚数の始まりの話をします。ただし，記号や説明は，現代風にアレンジして・・・。

１６世紀のヨーロッパで，３次方程式や４次方程式を代数的に解く公式を考えていた頃のお話です。当時は，まだ「数」と言えば「正の数」だけを考えていました。時代が下って１７世紀後半も，「負の数」は，数ではなかったのです。つまり，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

の様な事を考えていました。

　（日本の中学で）現在では，二次方程式の解の公式として，

，

を学びます。それと比較して，当時の二次方程式の考え方のひとつの例を紹介します。

・・・（０）

１行目は左辺は正なのに０は矛盾，他の場合は両辺正なのであり得る，と考えていました。

皆さんは，負の数を考えることのできる現代で数学を学んでいるので，（０）のような考え方（場合分け）に意味を感じないでしょうね。

（注）当時でも「大きな数から小さい数を引く，」という事は考えられていた。

３次４次方程式の解の公式の発見競争の時代，その渦中にあったひとりに着目します。医師で数学の教師もしていた，カルダノ（Girolamo Cardana, 1501－1576）です。カルダノの3次方程式の解法を紹介します。

３次方程式の３乗の係数を  にしても，一般性を失さないので，

・・・（１）

を考える。変数をと変換すると，であるから，を得る。

ここで ，とおけば（１）は，次のようになる。

・・・（２）

以下，この３次方程式（２）の解を見つければよい。

カルダノは変数を１つから２つに増やす方法を思いつきました。つまり，解がふたつの数の和で表されると仮定し，計算を進めました。続きを書きましょう。

（２）において，とおく，

　　　　［左辺］

であるから，

，　　・・・（３）

を満たすが求まれば（２）の解を得る。

を（３）の第２式に代入し，となり，を得る。

　ここで，と置くと，となり，２次方程式の解の公式を使って，



を得る。したがって，



となり，（複号同順）も得る。（ヒント：とは対称的）

・・・（４）

よって，３次方程式（２）の解の公式をカルダノは発見した。

　現代の感覚で「３乗根には３つの解があるので，この公式は値が確定していない」という指摘をするのは見当違いである。何故なら当時は，「複素数どころか負の数も存在しない」という時代だったのですから。議論の対象は，正の数だけなのです。つまり，が負とか，が負の場合は意味が無いので，解を考えるためには方程式を他の形に変えて考えていたのです。

次に，この様な時代にボンベリ（Rafael Bombell, 1526－1572）が考えた，具体的な三次方程式をひとつ紹介します。

　３次方程式

・・・（５）

をカルダノの解の公式（２）と比較する。明らかに，であるから，



となり，根号の中に，「負の数」が，

で出来てしまう。

　しかし，方程式（５）は解を持つ事は明らかなので・・・，



に違いないと考えたようである。

ここでは，虚数単位の現代の記号“ ”を使って書くことにして，ボンベリは，

・・・（６）

は正しい，・・・が，どうしてこうなるのか？と考えた。

　「普通の数と同じ計算するルールが成り立つ」のではないかと想像し，計算をした。





（６）の右辺



　途中，勝手に想像したという，「得体の知れないモノ」が，出てくるが，最後には，解を得られる。したがって，３次方程式（５）も，カルダノの解法で解ける。

　ボンベリの考えた ”” ではあるが，ボンベリ自身もその価値を見いだせなかったようです。というのも，ボンベリ自身や，次の時代の大数学者，デカルト（1596－1650）やパスカル（1623－1662）でも，「負の数」のことを「虚構の数」，「偽りの数」，「発明された数」などと呼んでいました。

１７世紀から１８世紀になると，この虚数単位 も徐々に利用され，受け入れられてくるようになりました。

オイラー（L. Euler 1707－1783）やガウス（J. C. F. Gauss 1777－1855）の登場により，虚数・複素数も普通に「数」の仲間になりました。その結果，ガウス平面（複素数平面，1811頃），やオイラーの公式を普通に考えることができるようになりました。

虚数を初めて学ぶとき『となる数を考えます』などと，驚くような話がはじまりますよね。昨日まで「すべての数は２乗すると，必ず正か零（0ゼロ）」と，このように教えられていたのに・・・「今までの説明は何だったの？」と思いましたよね。

虚数の発見には，多くの人の知恵と努力，そして長い時間が必要だったのです。教科書では，今日に至るまでの長い歴史をすべて省いて，『となる数を考えます』と，唐突に説明を始めていたのです。

［補足］①　「３次方程式を代数的に解く」以前に古代では，幾何学的に３次方程式を解いていた。現代の座標を使った形で説明する。

方程式の解は，右図のような放物線と円  の交点Ｐの座標で求まる。

確認するには を消去し，整理すればよい。

　 　

　②　現在，オイラーの公式と呼ばれているものは， （1714）という形で，ロジャー・コーツ（R. Cotes 1682－1716）が発見した。

―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――

参考文献　「Mathematics and Its History」John Stillwell (Springer)　2010

「カッツ　数学の歴史」Victor J. Katz （共立出版）2005

　　　　　「ヴィジュアル複素解析」T. Needham （培風館）2002

　　　　　「数学史」武隅良一郎　（培風館）1959

―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――

2018/07/01　堀部　和経