**三角形の面積について**

――――――　が出てこないお話　―――――――

［Ｓ１］　　から、話を始めましょう。

　この公式は、「底辺かける高さ割る２」と、多くの人が声に出して言うことができると思います。すごく一般に定着した「公式」ですね。

　さて、△ABCの外接円を考えたとき、その半径*R*との関係を見てみましょう。

　右の図で、半径BOの延長と、円Oとの交点を

Dとします。

△AHCと△BADは、相似です。



したがって、

 AC : AH＝BD : BA

となり、から、を得ます。したがって、

［Ｓ２］　　となります。

　次に、内接円を考え、その半径との関係を考えて

みましょう。

内接円の中心から、各辺に下ろした垂線の足を、

P , Q , R とおきます。すると、

 IBCICAIAB

 　

（ただし、）

［Ｓ３］　　ですね。

ところで、『 って、何ですか？ 』という質問にどのように答えますか。

『 三角形の１周の長さの半分 』･･･で、納得？･･･しますか？

　２点P，Qは、点Bから円に引いた接線の接点なので、

 BP ＝BQ

また、

BP 





 

同様に考えて、 AP ＝AR ，BP ＝BQ ，CQ ＝CR  ① となります。

　次に△ABCの∠Aの二等分線と∠Bおよび∠Cの外角の二等分線の交点をとします。つまり、辺BCと辺の延長ABとACに接する傍接円の中心がですね。

　２点S，Uは、点Aから円に引いた

接線の接点なので、

 AS ＝AU

　また、

AB＋BC＋CA

　　　　 AB＋( BT＋TC )＋CA

　　　　 ( AB＋BT )＋( TC＋CA )

　　　　 ( AB＋BS )＋( UC＋CA )

 AS＋UA

 2 AS

よって、AS ＝AU 

　つまり、

『 とは１つの頂点から、その内角の中にある傍接円の接点までの距離』

「」を具体的な長さで、示せました。

　これから、 BT＝BS，CT＝CU ② となります。

当然、他の２つの傍接円に関係して、同様な結果がえられますね。

全ての関係を書き込むと余りにゴチャゴチャしそうなので、①と②の一部だけを書いた図を作ってみました。

いろいろな長さに「」が顔を出していますね。



　さて、△APIと△ASは相似ですね。（：円の半径）

AP : PI＝AS : S

となり、





を得るので、

［Ｓ４］　

［Ｓ３］と合わせて 　キレイな式ですね。

　この等式から、

 

となり、

  ③　美しいと、思いませんか。

　先ほどと、同じ図で　△PIBと△SBは相似です

PI : PB＝SB : S



から、



となるので、［Ｓ４］に代入して、

［Ｓ５］　

となります。

この等式の右辺の分母分子に、をかけて、

 

となります。分母を払えば、

［Ｓ６］　　　（ヘロン）

となりますね。

　さて、　をすべてかけ合わせると、

 

両辺をで割って、

［Ｓ７］　　　（マイユー）

が得られます。また、③を代入すれば、ともかけますね。

|  |
| --- |
|  　　春日井東高校　堀部和経　（２０１０／１２） |

（参考資料）　「ヘロンの公式にいたる公式」　（堀部和経）