簡単に計算出来る（複雑そうな）面積

**Chap ．１　 サイクロイド下の面積**　――　微分積分学以前　――

　堀部　和経

§０　はじめに

　思い起こすと私が高校生の時，数学を教えていただいた川合先生に「微積を学ぶと，サイクロイドの面積や長さも計算出来るようになる」と教えられ，私自身も生徒に何年もの間、同じように教えてきました。

しかし，少し歴史を調べてみると，人類がサイクロイドの下の面積を知識として知っている時期と微分積分学の萌芽の時期が前後していることに気がつきました。「これはどういうことか？」，「おかしいじゃないか？」と思い，面積について，微分積分学の萌芽以前のアイデアを簡単にまとめました。

◎　微分積分を使って

（１）サイクロイドの説明

上図のように，自転車が平坦な道（地面）をまっすぐ進んでいる様なとき，タイヤの外周の１点Ｐが描く軌跡をサイクロイドという。

（２）デカルト座標による表現

計算を簡単にするためタイヤの半径を１としよう。

点Ｐが道（地面）に接している点を原点にし，右図のように座標軸をとる。点Ａは自転車の車軸の中心，点Ｂは点Ａから道（地面）に降ろした垂線の足とする。また，点ＨをＰＨ⊥ＡＢとなるように直線ＡＢ上にとる。

ここで，∠ＰＡＢとすると，明らかに



したがって，ＰＨ，ＡＨであるから，点Ｐとすると，

Ｐ （但し）

となる。

（３）サイクロイドの面積

タイヤが１回転する分のサイクロイド(Cycloid)と道（地面）の間の面積を計算してみよう。









これも「あまりに美しい値」とは感じませんか。

サイクロイドと地面の間の面積ですね。円（タイヤ）の面積のちょうど３倍ですね。

◎　微分積分以前

微積分学の成立以前にもサイクロイド下の面積は知られていた。その面積はどのようにして計算されていたかを解説する。この面積を，サイクロイド下の面積と呼ぶことにする。

（４）サイクロイド下の面積

　左図のサイクロイドは，今までと同じものでタイヤを２周した部分を描いている。右図は天井に張り付いたタイヤが天井を滑らないように回転した時にできる軌跡としてのサイクロイドです。

上図は，この２つのサイクロイドを重ねて描いたものである。そして，次の図は左端を拡大したものである。

サイクロイド上の点Ｐから，軸に平行な直径に下ろした垂線の足をＨとする。このとき，点Ｈは，２点Ｐ，Ｑの中点である。

このことから，点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）は，長方形ＯＢＡＣの中心点に関して点対称な曲線となっている。

点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）長方形ＯＢＡＣの面積を二等分している。長方形ＯＢＡＣの縦，横の辺の長さはそれぞれ２，である。長方形ＯＢＡＣであることから，点Ｈの軌跡と折れ線ＯＢＡで囲まれた部分の面積はとなる。

ところで，点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）は，随伴線，コンパニオン（Companion）と呼ばれている。



円（タイヤ）１回転分の随伴線と軸で囲まれた部分の面積はである。

　最後に，サイクロイドと随伴線の間の面積について，左側と右側に分けて考えて見よう。

　まず左側は、タイヤの回転位置のすべてにおいて，すべての垂線ＰＨの長さは，円周から直径に降ろしたすべての垂線の長さに等しい。したがって，左側の面積の差は半円の面積に等しい。右側も同様なので，左右合計でとなる。

　したがって，サイクロイド下面積は，となる。

　このアイデアは，ローベルバル（１６０２－１６７５）によるものである。

◎　まとめ

　微積が無ければ，サイクロイド下の面積は計算出来なかった分けではなく、『以前から知っている面積の値と，微分積分学の計算でも，間違い無いね。』ということでしょうね。

**Chap．２　マミコンの定理について**

◎　スクリーンのアニメーションを見てください。（説明文なし）

　（４）楕円に接する定長線分の掃く面積（掃過領域の面積）

　（３）円に接する定長線分の掃く面積

　（２）指数関数の下の部分の面積

　（１）サイクロイド下の面積

マミコン（Mamikon）の定理　　　　　　　（ここでは，証明なしで使用する。）

「接線掃過領域の面積」と「それに対する接線団の面積」は等しい。

◎　「円とサイクロイド下の面積の比は１：３」？



（１）再確認

半径１の円の面積をCとし，その円がつくるサイクロイドの下の面積をSとする。

C，Sである。

（２）マミコンの定理を使って，サイクロイド下の面積を再考する。



　接線掃過領域の面積と，それに対する接線団の面積は，共にAである。

　接線団の面積Aは，中心角の扇形PHIと二等辺三角形IJPの面積の和であるから，

 A



となる。

図形POHの面積をBとすると，

　 BA

となる。

弓形PHの面積をCとし，扇形PHI

から二等辺三角形IPHを引き，

C



となり，B=2Cとなる。

したがって，線分PHの掃過領域の面積をSとすると，

 SB+CC+CC

となる。確認であるが，の範囲だけではなく，の範囲で成り立つ。

◎　線分の掃過領域を比べる

　　常に，線分PHの掃過領域の面積Sは，弓形PHの面積Cの３倍である。したがって，円とサイクロイド下の面積比が１：３なのは，至極当然。

|  |
| --- |
| マミコンの定理(1981 Mamikon A. Mnatsakanian )は，アルメニアの雑誌にロシア語で書かれた。彼の専門は物理学で，ソビエト連邦から米国・カリフォルニアに訪れ地震学を研究している間にソビエト連邦が崩壊し，米国に取り残された。 |

※　参考文献　「Aha!　ひらめきの幾何学」共立出版。　次ページには、pp.197-198をそのまま引用

