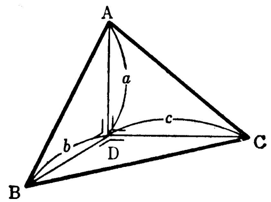
幾何学大事典 岩田至康編
2巻 pp149～151

1.12 3直角四面体

121 3直角四面体の底面の三角形は鋭角三角形で，頂点よりの高さの足は底の垂心である．

証明 (i) Dに集る3つの角が直角であるとする．$DA=a, DB=b, DC=c$ とおけば

$$AB^2=a^2+b^2,\quad AC^2=a^2+c^2,$$
$$BC^2=b^2+c^2$$
$$\therefore\ AB^2+AC^2>BC^2$$



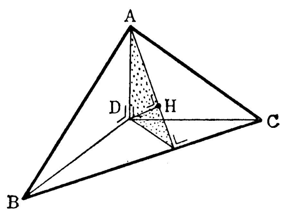
よって∠Aは鋭角である．他についても同様．

(ii) Dから平面ABCへ垂線DHを下し，AHを結べば，$DH\perp BC$ でかつ

$DA\perp DB,\ DA\perp DC\ \therefore\ DA\perp$平面DBC

$\therefore\ DA\perp BC$

となるから



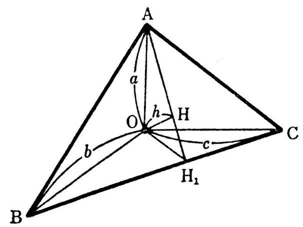
$BC\perp$平面ADH $\quad\therefore\ BC\perp AH$

同様にして $BH\perp AC$ となるから，H は $\triangle ABC$ の垂心である．

122 頂点をO，高さをhとする3直角四面体で，$OA=a, OB=b, OC=c$ とすれば

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

証明1 前題により高さの足 H は $\triangle ABC$ の垂心であるから AH と BC との交点を H_1 とすれば，$OH_1\perp BC$ となる．よってⅠ，181 系2により



$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{OH_1{}^2},\quad OH_1{}^2=H_1H\cdot H_1A$$

$$\therefore\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{AH\cdot AH_1}$$
$$+\frac{1}{H_1H\cdot H_1A}=\frac{1}{AH_1}\left(\frac{1}{AH}+\frac{1}{HH_1}\right)$$
$$=\frac{1}{AH_1}\times\frac{AH_1}{AH\cdot HH_1}=\frac{1}{AH\cdot HH_1}=\frac{1}{h^2}$$

証明2 OA, OB, OC を x, y, z 軸にとれば，平面 ABC の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

となるから，原点からこの平面に下した垂線の長さは

$$h=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{h}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

123 前題で $(\triangle OBC)^2+(\triangle OCA)^2+(\triangle OAB)^2=(\triangle ABC)^2$

(Descartes, Gua)

証明1 前図において

$$4(\triangle ABC)^2=AH_1{}^2\cdot BC^2$$
$$=(a^2+OH_1{}^2)(b^2+c^2)$$
$$=a^2(b^2+c^2)+(OH_1\cdot BC)^2$$
$$=4(\triangle OAB)^2+4(\triangle OAC)^2$$
$$+4(\triangle OBC)^2$$

証明2 前図において

$$OH_1{}^2=H_1H\cdot H_1A$$
$$\therefore\ (\triangle OBC)^2=(\triangle HBC)\cdot(\triangle ABC)$$

同様にして

$$(\triangle OCA)^2=(\triangle HCA)\cdot(\triangle BCA),$$
$$(\triangle OAB)^2=(\triangle HAB)\cdot(\triangle CAB)$$

$\therefore$ 左辺

$$=(\triangle HBC+\triangle HCA+\triangle HAB)(\triangle ABC)$$
$$=(\triangle ABC)^2$$

証明3 前題により

$$\frac{1}{h^2}=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$
$$\therefore\ h^2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=a^2b^2c^2 \tag{1}$$

ところが O-ABC の体積を V とすれば

$$3V=h\cdot\triangle ABC,\quad 6V=abc$$
$$\therefore\ (h\cdot\triangle ABC)^2=9V^2=\frac{1}{4}a^2b^2c^2$$

これに(1)を代入すれば

$$(\triangle ABC)^2=\frac{1}{4}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$
$$=(\triangle OBC)^2+(\triangle OCA)^2$$
$$+(\triangle OAB)^2$$

証明4 $\triangle OBC=\triangle ABC\cos\alpha$ 等．ここに $\cos\alpha$ は OH の方向余弦であるから

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

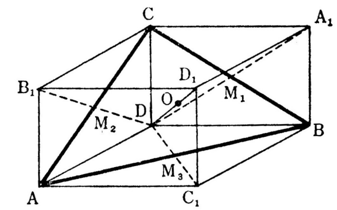
これにより直ちに証明される．

注 本定理は1783年 Gua によって Paris Academy に提出されたので Gua の定理とよばれているが，すでに Descartes および同時代の Faulhaber (1580～1635) によって知られていたといわれる．

124 3直角四面体 DABC の底面 ABC の重心を G' とすれば，DG' は四面体の外心 O を通り，$DG'=\dfrac{2}{3}R$

系1 外心Oは重心Gに関してDの対称点である．

証明 $\triangle ABC$ の各辺の中点 M_i に関するDの対称点を A_1, B_1, C_1 とすれば，$A_1, B_1, C_1, A, B, C, D$ は直方体の頂点となる．もう1つの頂点D_1は，Dの直方体の中心Oに関する対称点となり，Oは四面体 ABCD の外心に一致する．何となれば AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 は O で2等分され，それらの長さは長方形の対角線なることより等しいか



ら．さて147によればこの直方体に内接している四面体 D_1ABC の D_1G' は対角線に一致するから，DG' は O を通る．つぎに147 系1によれば

$$D_1G'=\frac{2}{3}DD_1$$

で，$D_1G'=2DG'$ であるから

$$DG'=\frac{1}{3}DD_1=\frac{2}{3}R$$