π が無理数であることの初等的証明

「π は無理数である」ことを，高校の数学（微積分）を学んだ生徒に理解しやすいような形で証明することを目的としている．

この目的のため，以下いくつかの性質を証明した後，本題を示す．

1 準備

全体を通じて次のように整式 $f(x)$ を定義する．

$f(x)$ の定義

2 つの自然数 p, n に対して，$f(x) = \dfrac{1}{n!}p^n x^n (\pi - x)^n$ とする．

1.1 ある極限の性質

補助定理 1

任意の $a > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

[証明]

$2a < m$ となる自然数 m を 1 つ定める．

十分大きな自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{n!} &= \frac{a^m}{m!} \times \frac{a}{m+1} \times \frac{a}{m+2} \times \cdots \times \frac{a}{n} \\
&< \frac{a^m}{m!} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{a^m}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}
\end{aligned}$$

となる．

したがって，$n \to \infty$ のとき，(右辺)$\to 0$ なので，(左辺) $\to 0$ [証終]

1.2 ある積分の値の範囲（その 1）

補助定理 2

2 つの自然数 p, n に対して，

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < \frac{1}{n!}p^n \pi^{2n+1}$$

[証明]

実数 x は，条件 $0 < x < \pi$ を満たすとしてよい．すると，$0 < \pi - x < \pi$ であるので，

$$
\begin{array}{rcccl}
0 & < & x(\pi - x) & < & \pi^2 \\
0 & < & x^n(\pi - x)^n & < & \pi^{2n} \\
0 & < & \dfrac{1}{n!}p^n x^n(\pi - x)^n & < & \dfrac{1}{n!}p^n\pi^{2n} \\
0 & < & \dfrac{1}{n!}p^n x^n(\pi - x)^n \sin x & < & \dfrac{1}{n!}p^n\pi^{2n} \\
0 & < & f(x)\sin x & < & \dfrac{1}{n!}p^n\pi^{2n} \\
\displaystyle\int_0^\pi 0dx & < & \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin xdx & < & \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{1}{n!}p^n\pi^{2n}dx \\
0 & < & \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin xdx & < & \dfrac{1}{n!}p^n\pi^{2n+1}
\end{array}
$$

[証終]

1.3　ある積分の値の範囲（その 2）

補助定理 3

自然数 n を十分大きくとると，$0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin xdx < 1$ とできる．

[証明]

補助定理 1 より，$\dfrac{(p\pi^2)^n}{n!} < \dfrac{1}{\pi}$ とできる．よって，

$$
\frac{1}{n!}p^n\pi^{2n+1} = \frac{(p\pi^2)^n}{n!} \times \pi < 1
$$

したがって補助定理 2 から，自然数 n を十分大きくとると，$0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin xdx < 1$ とできる．　[証終]

1.4　$f(x)$ の性質（その 1）

補助定理 4

整式 $f(x)$ の高次導関数の $x = 0$ に対する値は，次のようになる．

$$
f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0
$$

$0 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$
f^{(n+k)}(0) = (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{(n+k)!}{n!} p^n \pi^{n-k}
$$

[証明]

二項定理を用いて，具体的に $f(x)$ を計算すると，

$$
f(x) = \frac{1}{n!}p^n x^n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \pi^{n-k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}(-1)^k {}_n\mathrm{C}_k p^n \pi^{n-k} x^{n+k}
$$

となる．

$f(x)$ は $2n$ 次の整式であるが，n 次以上の項しか持たないので，

$$
f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0
$$

となる．後のために，0 は整数であることに注意しておく．

　また，$0 \leqq k \leqq n$ である整数 k に対して，直接計算すると

$$f^{(n+k)}(0) = \frac{1}{n!}(-1)^k {}_n\mathrm{C}_k p^n \pi^{n-k}(n+k)! = (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{(n+k)!}{n!} p^n \pi^{n-k}$$

となる．　[証終]

1.5　$f(x)$ の性質（その 2）

補助定理 5

非負の整数 k に対して，

$$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

[証明]

　まず，$f(\pi) = f(0)$ は説明するまでもないから，k を自然数としてよい．

　$f(x)$ の定義から，明らかに $f(x) = f(\pi - x)$ である．

　よって，$f'(x) = f'(\pi - x) \times (\pi - x)' = -f'(\pi - x)$ となり，

　繰り返して，$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$ となる．

　したがって，$x = \pi$ を代入すれば，

$$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

を得る．　[証終]

1.6　ある積分の値

補助定理 6

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0)$$

[証明]

　まず，部分積分を 2 度使って計算すると，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x dx &= \int_0^\pi f(x)(-\cos x)' dx \\ &= [-f(x)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x dx \\ &= f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi f'(x)(\sin x)' dx \\ &= f(\pi) + f(0) + [f(x)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin x dx \\ &= f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f''(x)\sin x dx\end{aligned}$$

となる．

　また，$f(x)$ は $2n$ 次の整式だったので，$k \geqq 2n+1$ となる k に対して，$f^{(k)}(x) = 0$（恒等式）となる．

以上から，2 度の部分積分の計算をひとまとめにしたものを、さらに n 回おこなうことにより，次の結果の 1 行目を得る．加えて，補助定理 5 を使って計算すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{f^{(2k)}(\pi)+f^{(2k)}(0)\right\}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{(-1)^{2k}f^{(2k)}(0)+f^{(2k)}(0)\right\}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{f^{(2k)}(0)+f^{(2k)}(0)\right\}\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0)\end{aligned}$$

となる．[証終]

2　π は無理数である

定理

π は無理数である。

[証明]

背理法を用いて証明する．

π は有理数であるとしよう．すると 2 つの自然数 p, q を用いて，$\pi=\dfrac{q}{p}$ とおける．

この自然数 p を 1 準備の中の p と考え，自然数 n を補助定理 3 にあてはまる十分大きな自然数とする．

まず，$k=0,1,2,\cdots,n$ に対して，

$$p^n\pi^{n-k}=p^n\left(\frac{q}{p}\right)^{n-k}=p^kq^{n-k}$$

となる．この計算から $p^n\pi^{n-k}$ は整数であり，明らかに $(-1)^k$，${}_n\mathrm{C}_k$，$\dfrac{(n+k)!}{n!}$ も全部整数なので，それらの積,

$$f^{(n+k)}(0)=(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\frac{(n+k)!}{n!}p^n\pi^{n-k}$$

も整数である．したがって，補助定理 4 により，$k=0,1,2,\cdots,2n$ に対して，$f^{(k)}(0)$ はすべて整数である．

ゆえに，補助定理 6 より，$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0)$ は整数となる．$\cdots\cdots(1)$

ところで，補助定理 3 より，$\displaystyle 0<\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx<1$ であった．$\cdots\cdots(2)$

(1) と (2) は明らかに，矛盾である．[証終]

3　あとがき

この証明方法は，イワン・ニーベンによる,「π が無理数であることの簡単な証明」(1947) のアイデアを高校生用に書き直したものです.

春日井高校　堀部和経

1) I.Niven : A simple proof that π is irrational,Bull. Amer. Math. Soc.,53(1947),p. 507.