『平面グラフを考えることで，オイラーの公式を証明する』

全ての辺がその両端の点以外で他の辺と共有点を持たない図形を<u>平面グラフ</u>と呼ぶことにし、その頂点数，辺数，面数をそれぞれ v, e, f とする。

いま，平面グラフのある辺が面を囲っていないときその辺を<u>枝</u>と呼ぶことにしよう。（図１参照）平面グラフから枝を取り去ったとき，同じ数だけ頂点（v）と辺（e）が減るので $v-e+f$ の値は変化しない。また，枝のみ（ $f=0$ ）のグラフは考えないことにする。

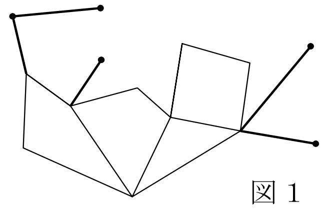

図１

以下，平面グラフは枝を持たない平面グラフのみ扱うものとする。

平面グラフでは， $v-e+f=1$ である。

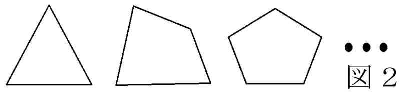

図２

［証明］　面数 f による数学的帰納法で示す。

（Ｉ） $f=1$のとき，平面グラフは三角形，四角形，五角形，･･･である。（図２参照）

したがって，一般に n 角形とすると，明らかに $v=e=n$ であるから，

$$v-e+f=n-n+1=1$$

となり，成り立つ。

（Ⅱ）ある自然数 $f(\geqq 1)$ があり，面数が f である全ての平面グラフで $v-e+f=1$ が成り立っていると仮定する。

面数が $F=f+1$ である任意の平面グラフを考え頂点数，辺数をそれぞれ， V, E とする。（図３参照）

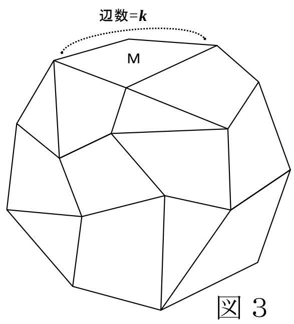

図３

この平面グラフの面で外周部にある面（多角形）をひとつ**M**とする。面**M**取り除くと，平面グラフの面数は１つ減る。この平面グラフの頂点数，辺数，面数をそれぞれ v, e, f とする。面が１つ減っているので，帰納法の仮定により $v-e+f=1$ である。

ここで，この多角形**M**の外周部の辺数を k とすると， $v=V-(k-1)$ ， $e=E-k$ ， $f=F-1$ となっている。これを代入し，

$$1=(V-k+1)-(E-k)+(F-1)=V-E+F$$

［証明終わり］

オイラーの公式

多面体の頂点数，辺数，面数をそれぞれ v, e, f とすると， $v-e+f=2$ が成り立つ。

［証明］　多面体の面を１つ取り除き，その穴を大きくして頂点と辺の関係を変えないで平面上に広げた図形は，平面グラフになる。（図４参照）その平面グラフの頂点，辺，面を数えると，多面体と比べ面だけが１つ少ない。平面グラフは $v-e+f=1$ であるので，多面体では $v-e+f=2$ である。

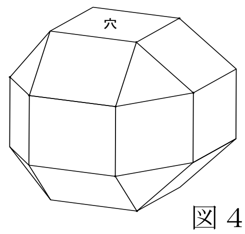

図４

［証明終わり］

【注意】①枝のみ（ $f=0$ ）の場合も含め，枝があっても無くても平面グラフでは $v-e+f=1$ である。②オイラーの公式では $f\geqq 4$ である。③平面グラフにおける「辺」は（直線の一部の）線分でなくてもよく，曲線でよい。