（A）半径１の円に内接する正 n 角形の辺および対角線の異なる長さの平方の和 S_n を求めよ。

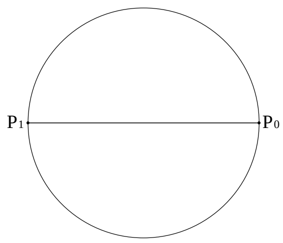
【準備】$(n=2), n=3,4,5,8,(n=7,9:pass)$ について，具体的に計算してみよう。

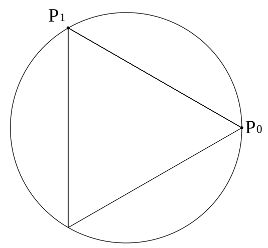
◎正二角形の話題を持ち出すことに疑問があると思いますが・・・計算だけしてみよう。
◎正七角形，正九角形の計算は，パスすることにします。

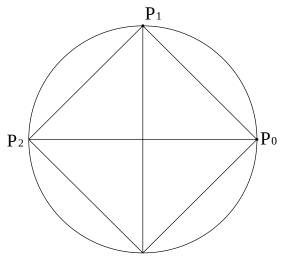
［Hint］円の中心をOとする。$\triangle OP_0P_k$ に余弦定理

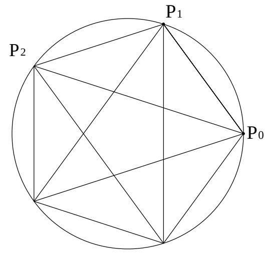
$$P_0P_k^{\ 2} = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\angle P_kOP_0 = 2 - 2\cos\angle P_kOP_0$$

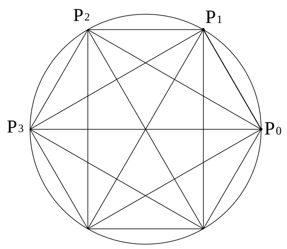
を用いるとよい。$\cos 72^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}, \cos 144^\circ = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ を使うとよい。

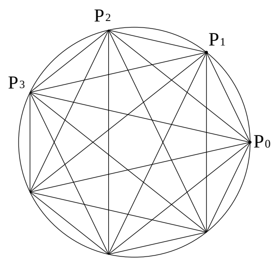


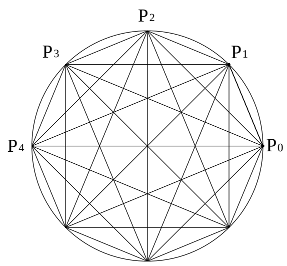


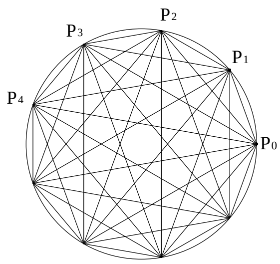












（$\circ\ n=2$　$P_0P_1^{\ 2} = 2^2 = 4$　よって，$S_2 = 4$）

$\circ\ n=3$　$P_0P_1^{\ 2} = 3$　よって，$S_3 = 3$

$\circ\ n=4$　$P_0P_1^{\ 2} = 2$，$P_0P_2^{\ 2} = 4$　よって，$S_4 = 6$

$\circ\ n=5$　$P_0P_1^{\ 2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$，$P_0P_2^{\ 2} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$　よって，$S_5 = 5$

$\circ\ n=6$　$P_0P_1^{\ 2} = 1$，$P_0P_2^{\ 2} = 3$，$P_0P_3^{\ 2} = 4$　よって，$S_6 = 8$

$\circ\ n=7$　パス

$\circ\ n=8$　$P_0P_1^{\ 2} = 2-\sqrt{2}$，$P_0P_2^{\ 2} = 2$，$P_0P_1^{\ 2} = 2+\sqrt{2}$，$P_0P_3^{\ 2} = 4$ よって，$S_8 = 10$

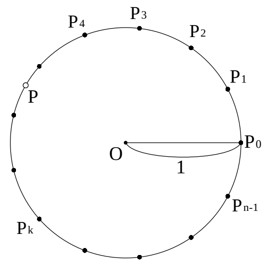
$\circ\ n=9$　パス

【Ａ問題（予想）】半径１の円に内接する正 n 角形の辺および対角線の異なる長さの平方の和 S_n は

$$S_n=\begin{cases} n & (n:\text{奇数}) \\ n+2 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

と予想できる。このことを証明するために，次の補助定理を示す。

【補助定理１】　図のように単位円周上に n 個の点 $P_k\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$ が



等間隔で並んでいるとき，単位円周上の任意の点 P に対して，

$$\sum_{k=0}^{n-1} {PP_k}^2 = 2n$$

が成り立つ。

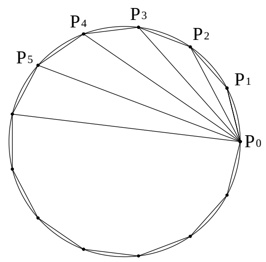
【証明】$n+1$ 個の点の位置ベクトルを　$P_k=\overrightarrow{p_k}\ ,P=\overrightarrow{p}$　と表す。

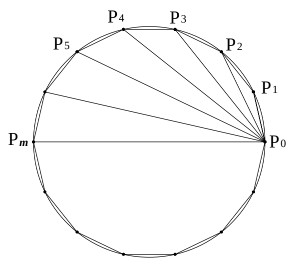
$$\sum_{k=0}^{n-1} {PP_k}^2=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\overrightarrow{p_k}-\overrightarrow{p}\right|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left|\overrightarrow{p_k}\right|^2+\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{p}\bullet\overrightarrow{p_k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+1-2\overrightarrow{p}\bullet\overrightarrow{p_k}\right)$$

$$=2n-\sum_{k=0}^{n-1}2\overrightarrow{p}\bullet\overrightarrow{p_k}=2n-\overrightarrow{p}\bullet\left(\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{p_k}\right)=2n-\overrightarrow{p}\bullet\overrightarrow{0}=2n$$

【証明終わり】

【Ａ問題の証明】





（ア）n が奇数の時，

$$S_n=\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n-1}P_0{P_k}^2=\frac{1}{2}\cdot 2n=n$$

（イ）n が偶数の時，$m=\dfrac{n}{2}$ とする。

$$S_n=\frac{1}{2}\times\left(\sum_{k=0}^{n-1}P_0{P_k}^2+P_0{P_m}^2\right)=\frac{1}{2}\left(2n+2^2\right)=n+2$$

【証明終わり】

※　この証明は，ベクトルを利用しているが，複素数の利用や，座標の計算でも本質的には，同じ証明が書ける。

例えば，$|z|=1$ 上に等間隔に存在する n 個の複素数 ω_k と $|z|=1$ 上の任意の複素数 ω に対して，

$$\sum_{k=0}^{n-1}{PP_k}^2=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega_k-\omega\right|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left|\omega_k\right|^2-\omega_k\overline{\omega}-\omega\overline{\omega_k}+\left|\omega\right|^2\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(2-\omega_k\overline{\omega}-\omega\overline{\omega_k}\right)$$

$$=2n+\overline{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k+\omega\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\omega_k}=2n+\overline{\omega}\cdot 0+\omega\cdot 0=2n$$

面倒な表示になるが直接座標を利用し，等間隔に存在する n 個の点を一般性を失さないで，

$$P_k=\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right),\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$$

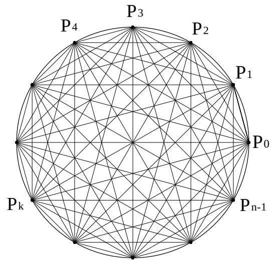
と表しても証明できる。

［問題］　「数学オリンピックチャンピオンの美しい解き方」テレンス・タオ　著・寺嶋英志　訳　より

（B）半径１の円に内接する正多角形の辺及び対角線全ての長さの平方の和T_nを求めよ。

【Ｂ解答】

$$T_n = \frac{1}{2} n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_0 P_k{}^2 = \frac{1}{2} n \cdot 2n = n^2$$

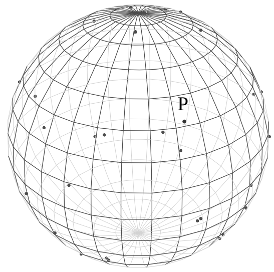


【補助定理２】　単位球面にある円周上にn個の点P_k $(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$が，

$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{p_k} = \overrightarrow{0}$を満たすように並んでいる。このとき，同じ単位球面上の任意の点Pに対して，

$$\sum_{k=0}^{n-1} PP_k{}^2 = 2n$$

が成り立つ。



【証明】　補助定理１の証明を，この$n+1$個の点に適用すれば良い。　　　【証明終わり】

（C）半径１の球に内接する正面体のすべての頂点間の距離の平方の和Uを求めよ。

【解答】　単位球に内接する正多面体は，中心Ｏに関して対称な２点が存在している。その２点を，$P(\vec{p}), Q(\vec{q})$とすれば，$\vec{p}+\vec{q}=\vec{0}$である。よって，全て頂点のベクトルの和は$\vec{0}$である。

よって，$U=$「頂点数の平方」となる。

正多面体のUの値を一覧表にする。

単位球面に内接する正多面体のUの値一覧表					
正多面体名	面数f	辺数e	頂点数v	$U=v^2$	備考
正４面体	4	6	4	１６	
正六面体	6	１２	8	６４	
正八面体	8	１２	6	３６	
正十二面体	１２	３０	２０	４００	
正二十面体	２０	３０	１２	１４４	

［問題］　参考：日本数学オリンピックの問題より