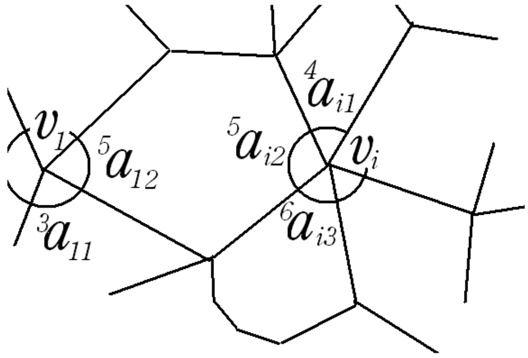
デカルトの定理



（穴の無い）多面体を考える。
今、頂点数 v，辺数 e，面数 f とすると、$v-e+f=2$ である。（オイラーの定理）

この多面体のすべての頂点に番号を付け $v_i\ (i=1,\cdots,v)$ とする。つまり、$v=\sum_i$ となる。

いま、各 i について、v_i の周りの角を $a_{ij}={}^{n}a_{ij}\ (j=1,\cdots,k_i)$ とする。左肩の n の説明をする。各 j に対してその角 a_{ij} の属する多角形が、n 角形の時に $a_{ij}={}^{n}a_{ij}$ と表す。

このとき、各 i について頂点 v_i の周りの角の和 $\sum_j a_{ij}$ は 2π より小さい。その不足分を δ_i とする。つまり、$\delta_i=2\pi-\sum_j a_{ij}\ (>0)$ とする。このとき、$\sum_i \delta_i=4\pi$ となる事を示す。

証明

この多面体の面について、n 角形は f_n 個あるとする。すると、次の各等式が成立する。

$$,\quad f=\sum_n f_n,\quad e=\frac{1}{2}\sum_n nf_n,\quad \sum_{i,j} a_{ij}=\sum_n {}^{n}a_{ij}=\sum_n (n-2)\pi\, f_n$$

である。さて、

$$\begin{aligned}
\sum_i \delta_i &= \sum_i\left(2\pi-\sum_j a_{ij}\right)\\
&=\sum_i 2\pi-\sum_i\sum_j a_{ij}\\
&=2\pi\sum_i\ -\sum_n {}^{n}a_{ij}\\
&=2\pi v-\sum_n (n-2)\pi\, f_n\\
&=2\pi v-\pi\sum_n n\, f_n+2\pi\sum_n f_n\\
&=2\pi v-2\pi e+2\pi f\\
&=2\pi(v-e+f)\\
&=4\pi
\end{aligned}$$