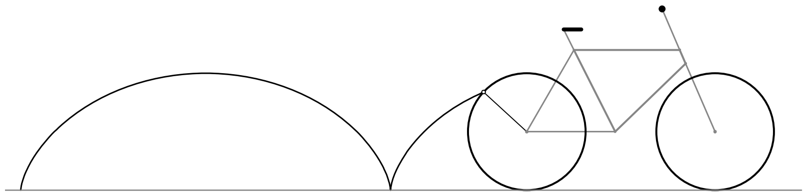
簡単に計算出来る（複雑そうな）面積

Chap．１　サイクロイド下の面積 ―― 微分積分学以前 ――

堀部　和経

§０　はじめに

思い起こすと私が高校生の時，数学を教えていただいた川合先生に「微積を学ぶと，サイクロイドの面積や長さも計算出来るようになる」と教えられ，私自身も生徒に何年もの間、同じように教えてきました。

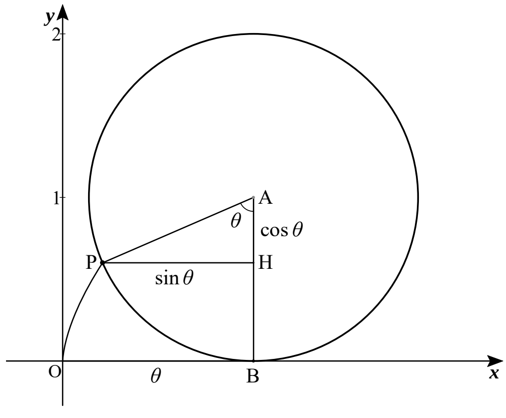


しかし，少し歴史を調べてみると，人類がサイクロイドの下の面積を知識として知っている時期と微分積分学の萌芽の時期が前後していることに気がつきました。「これはどういうことか？」，「おかしいじゃないか？」と思い，面積について，微分積分学の萌芽以前のアイデアを簡単にまとめました。

◎　微分積分を使って

（１）サイクロイドの説明

上図のように，自転車が平坦な道（地面）をまっすぐ進んでいる様なとき，タイヤの外周の１点Ｐが描く軌跡をサイクロイドという。



（２）デカルト座標による表現

計算を簡単にするためタイヤの半径を１としよう。

点Ｐが道（地面）に接している点を原点にし，右図のように座標軸をとる。点Ａは自転車の車軸の中心，点Ｂは点Ａから道（地面）に降ろした垂線の足とする。また，点ＨをＰＨ⊥ＡＢとなるように直線ＡＢ上にとる。

ここで，∠ＰＡＢ$=\theta$とすると，明らかに

$$\overline{\mathrm{OB}}=\overset{\frown}{\mathrm{PB}}=\theta$$

したがって，ＰＨ$=\sin\theta$，ＡＨ$=\cos\theta$であるから，点Ｐ(x, y)とすると，

$$\mathrm{P}:\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}\quad（但し0\leq\theta\leq 2\pi）$$

となる。

（3）サイクロイドの面積

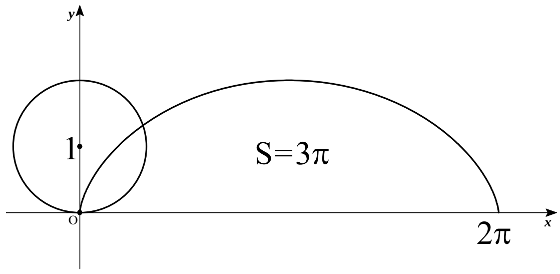
タイヤが１回転する分のサイクロイド(Cycloid)と道（地面）の間の面積Sを計算してみよう。

$$S=\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{1-2\cos\theta+\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right)\right\}d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=3\pi$$



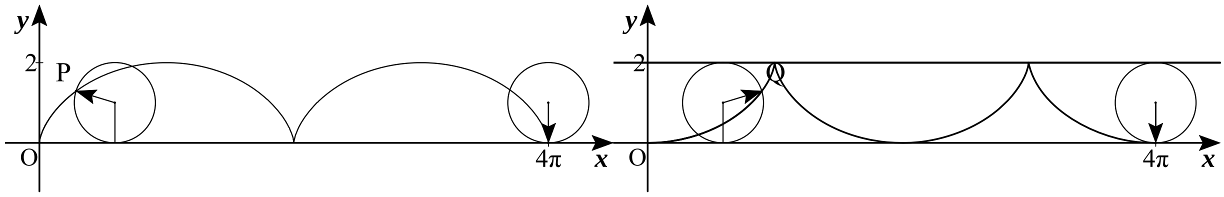
これも「あまりに美しい値」とは感じませんか。

サイクロイドと地面の間の面積$S=3\pi$ですね。円（タイヤ）の面積πのちょうど３倍ですね。

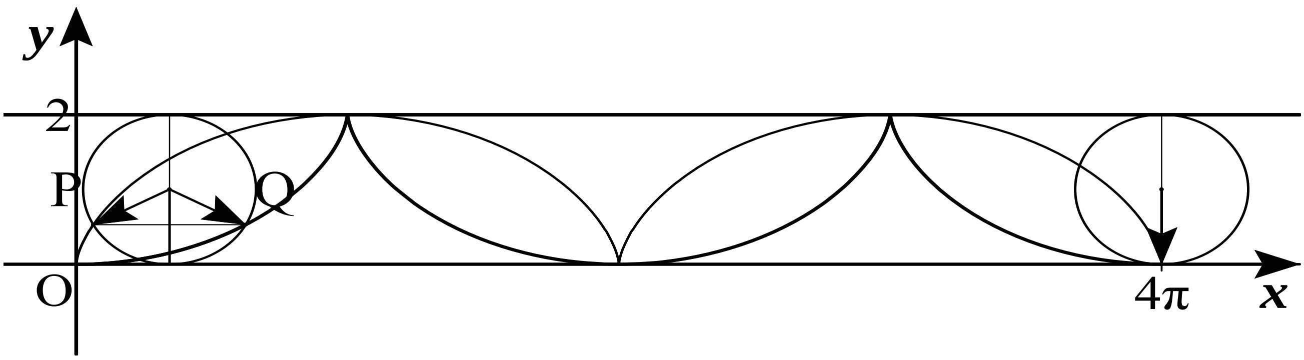
◎　微分積分以前

微積分学の成立以前にもサイクロイド下の面積は知られていた。その面積はどのようにして計算されていたかを解説する。この面積を，サイクロイド下の面積と呼ぶことにする。

（4）サイクロイド下の面積

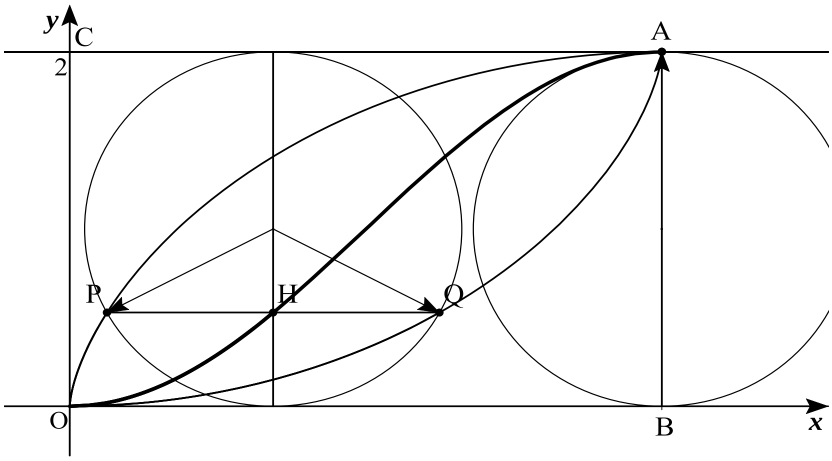


左図のサイクロイドは，今までと同じものでタイヤを２周した部分を描いている。右図は天井に張り付いたタイヤが天井を滑らないように回転した時にできる軌跡としてのサイクロイドです。



上図は，この２つのサイクロイドを重ねて描いたものである。そして，次の図は左端を拡大したものである。

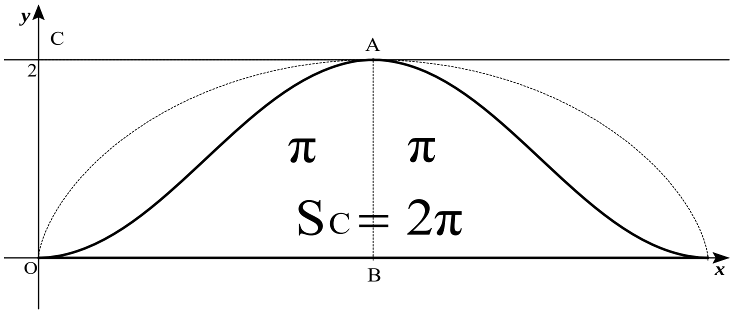
サイクロイド上の点Ｐから，y 軸に平行な直径に下ろした垂線の足をＨとする。このとき，点Ｈは，２点Ｐ，Ｑの中点である。



このことから，点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）は，長方形ＯＢＡＣの中心点に関して点対称な曲線となっている。

点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）長方形ＯＢＡＣの面積を二等分している。長方形ＯＢＡＣの縦，横の辺の長さはそれぞれ２，π である。長方形ＯＢＡＣ＝2π であることから，点Ｈの軌跡と折れ線ＯＢＡで囲まれた部分の面積は π となる。

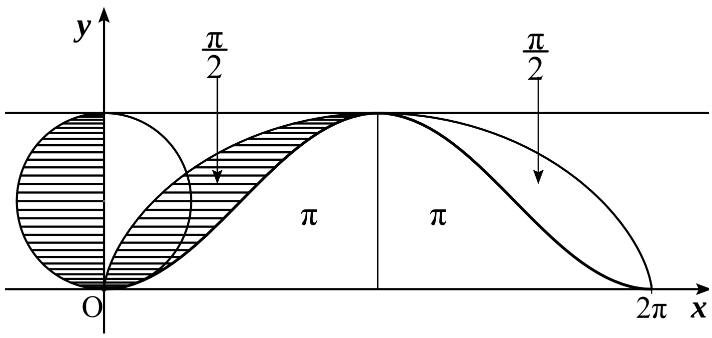
ところで，点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）は，随伴線，コンパニオン（Companion）と呼ばれている。



円（タイヤ）１回転分の随伴線と x 軸で囲まれた部分の面積は $S_C = 2\pi$ である。

最後に，サイクロイドと随伴線の間の面積について，左側と右側に分けて考えて見よう。

まず左側は、タイヤの回転位置のすべてにおいて，すべての垂線ＰＨの長さは，円周から直径に降ろしたすべての垂線の長さに等しい。したがって，左側の面積の差は半円の面積に等しい。右側も同様なので，左右合計で π となる。



したがって，サイクロイド下面積は，3π となる。

このアイデアは，ローベルバル（１６０２－１６７５）によるものである。

◎　まとめ

微積が無ければ，サイクロイド下の面積は計算出来なかった分けではなく、『以前から知っている面積の値と，微分積分学の計算でも，間違い無いね。』ということでしょうね。

Chap.　２　マミコンの定理について

◎　スクリーンのアニメーションを見てください。(説明文なし)

（４）楕円に接する定長線分の掃く面積（掃過領域の面積）

（３）円に接する定長線分の掃く面積

（２）指数関数の下の部分の面積

（１）サイクロイド下の面積

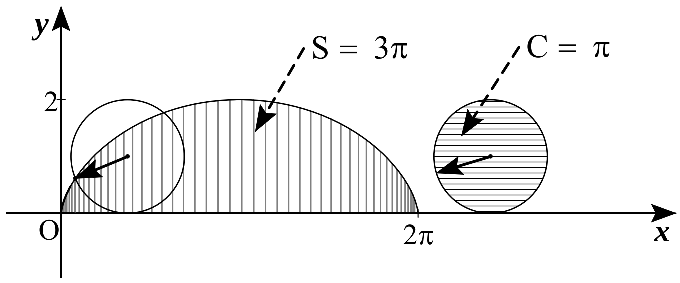
> マミコン（Mamikon）の定理　　（ここでは，証明なしで使用する。）
>
> 「接線掃過領域の面積」と「それに対する接線団の面積」は等しい。

◎　「円とサイクロイド下の面積の比は１：３」？

（１）再確認

半径１の円の面積をＣとし，その円がつくるサイクロイドの下の面積をＳとする。

$C=\pi$，$S=3\pi$ である。



（２）マミコンの定理を使って，サイクロイド下の面積を再考する。

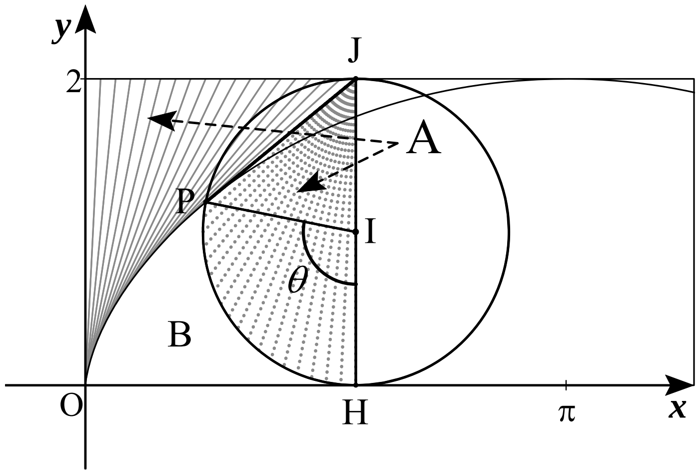
接線掃過領域の面積と，それに対する接線団の面積は，共にＡである。

接線団の面積Ａは，中心角 θ の扇形PHIと二等辺三角形IJPの面積の和であるから，

$$A=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\sin\theta\right)$$

となる。



図形 POH の面積を B とすると,

$$B = 2\times\theta - 2A = 2\theta - (\theta + \sin\theta) = \theta - \sin\theta$$

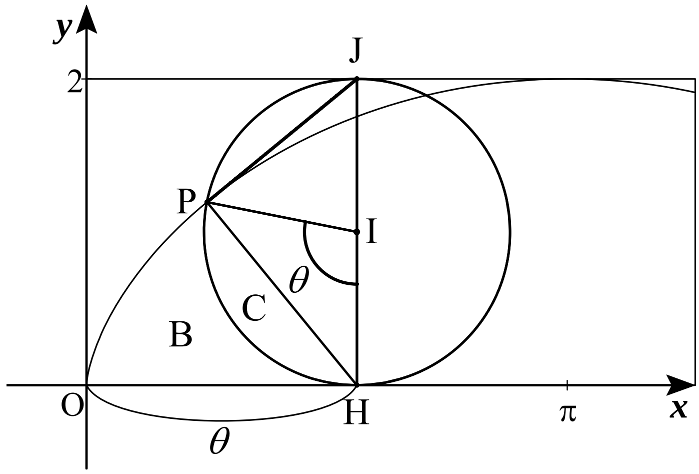
となる。

弓形 PH の面積を C とし，扇形 PHI から二等辺三角形 IPH を引き,

$$C = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta)$$

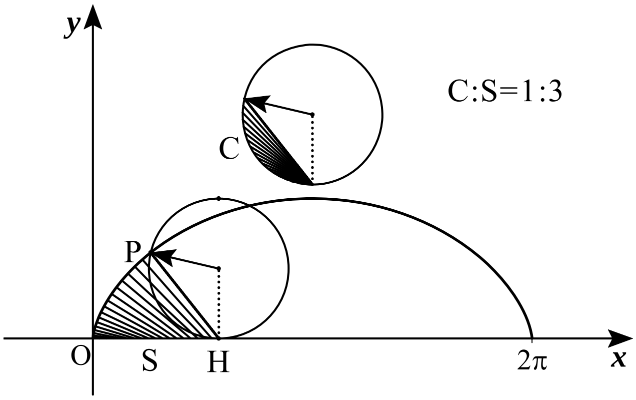
となり，B=2C となる。

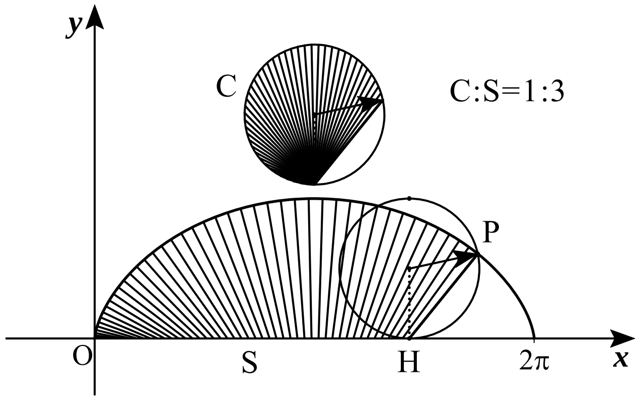


したがって，線分 PH の掃過領域の面積を S とすると,

$$S = B + C = 2C + C = 3C$$

となる。確認であるが，$0 \le \theta \le \pi$ の範囲だけではなく，$0 \le \theta \le 2\pi$ の範囲で成り立つ。





◎　線分の掃過領域を比べる

常に，線分 PH の掃過領域の面積 S は，弓形 PH の面積 C の３倍である。したがって，円とサイクロイド下の面積比が１：３なのは，至極当然。

マミコンの定理(1981 Mamikon A. Mnatsakanian)は，アルメニアの雑誌にロシア語で書かれた。
彼の専門は物理学で，ソビエト連邦から米国・カリフォルニアに訪れ地震学を研究している間にソビエト連邦が崩壊し，米国に取り残された。

※　参考文献　「Aha!　ひらめきの幾何学」共立出版。　次ページには、pp.197-198 をそのまま引用

7.9 マミコンの定理の証明

この節では，微分幾何を用いてマミコンの定理を証明する．まず，位置ベクトル $\boldsymbol{X}(s)$ で表される滑らかな空間曲線 Γ から始める．ここで，s は曲線の弧長関数で，たとえば，区間 $0 \leq a \leq s \leq b$ を動くものとする．Γ の単位接線ベクトルは微分 $d\boldsymbol{X}/ds$ であり，これを $\boldsymbol{T}(s)$ と表記する．単位接線の微分は，次の式で与えられる．

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \kappa(s)\boldsymbol{N}(s)$$

ここで，$\boldsymbol{N}(s)$ は単位主法線で，$\kappa(s)$ は曲率である．

曲線 Γ は媒介変数表示された次のベクトル方程式で表される曲面 S を生成する．

$$\boldsymbol{y}(s,u) = \boldsymbol{X}(s) + u\boldsymbol{T}(s)$$

ここで，u は，s に伴って長さの変化する区間，たとえば $0 \leq u \leq f(s)$ を動く．媒介変数の対 (u,s) が区間 $[a,b]$ における関数 f の縦線集合を動くとき，もとの曲線 Γ から位置ベクトル $\boldsymbol{y}(s,f(s))$ で表される別の曲線へ伸びる接線分が，曲面 S を掃く．

幾何学的には，S は可展面，すなわち，平面上に歪めることなく平らに広げることができる局面である．このようにして Γ から生成された曲面 S を接線掃過領域という．

S の面積は，二重積分

$$a(S) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u} \right\| du\, ds$$

によって与えられる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s} + u\frac{\partial \boldsymbol{T}}{ds} = \boldsymbol{T}(s) + u\kappa(s)\boldsymbol{N}(s)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u} = \boldsymbol{T}(s), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u} = u\kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \times \boldsymbol{T}(s)$$

であるから，被積分関数は

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u} \right\| = u\kappa(s)$$

になる．なぜなら，$||\boldsymbol{N}(s) \times \boldsymbol{T}(s)|| = 1$ だからである．したがって，これを積分した面積は

$$a(S) = \int_a^b \left(\int_0^{f(s)} u\, du \right) \kappa(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(s)\kappa(s)\, ds$$

になる．

次に，弧長 s を，固定された接線，たとえば $s = a$ に対応する接線と接線ベクトル $\boldsymbol{T}$ がなす角度 φ の関数と考える．s が φ を用いて表されるならば，関数 $f(s)$ も φ の関数になり，$f(s) = r(\varphi)$ と書くことができる．曲面 S 上では，φ は測地的接線の角度であり，したがって曲率 κ は弧長に対する φ の変化率，すなわち $\kappa = d\varphi/ds$ になる．前述の積分において，s を φ の関数として表すように変更する．すると，$f^2(s) = r^2(\varphi)$，$\kappa(s)\, ds = d\varphi$ となるので，積分 $a(S)$ は

$$a(S) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi \tag{7.6}$$

となる．ここで，φ_1 と φ_2 は，それぞれ $s = a$ と $s = b$ に対応する始点と終点における角度である．公式 (7.6) は，面積 $a(S)$ が弧長 Γ に明示的には依存しておらず，角度 φ_1 と φ_2 のみに依存していることを示している．実際，$a(S)$ は，平面上で $0 \leq r \leq r(\varphi)$ と $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2$ を満たす極座標 (r,φ) の動径集合の面積に等しい．

式 (7.6) を幾何学の言葉で再定式化すると，マミコンの定理が極めて直感的な形で得られる．長さ $r(\varphi)$ のそれぞれの接線分を，その接点が共通の頂点 O に移るように平行移動させると錐面の一部になり，これを曲線 Γ の**接線団**と呼ぶ．こうして，式 (7.6) から次の定理が得られる．

マミコンの定理. 曲線の接線掃過領域の面積は，それに対応する接線団の面積に等しい．