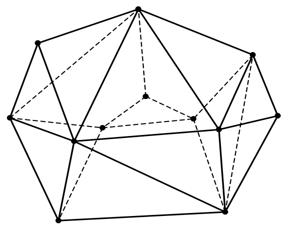
５色問題　　（４色問題の誤植じゃないよ）(^_^)

この小論は，「地図は４色あれば塗り分けられる」は，残念ながら，まだムツカシイ（面倒？）ので，**「地図は５色あれば塗り分けられる」**という定理を<u>高校生がスラスラ読めるような証明</u>にして書くことを目的としています。

前提条件として，オイラーの公式を使います。



１　前提条件と準備

１．１　オイラーの公式は知っていますね

多面体の頂点，辺，面の個数を，v, e, f とすると，$v-e+f=2$ ・・・Ⓐ

平面図形に対しては，$v-e+f=1$ ・・・Ⓑ

１．２　多面体に関する２つの不等式の証明

$e \leq 3f-6$ ・・・Ⓒ　　　　$e \leq 3v-6$ ・・・Ⓓ

［証明］（C） 辺の両端には２つの頂点があるので辺を基準に頂点を数えると，延べ頂点数は $2e$ 個である。

辺が n 本でている頂点の個数を v_n とすると，$v = v_3 + v_4 + v_5 + \cdots$ となる。ところで，辺を基準に頂点を延べ数で数えると $3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \cdots$ となり，これは $2e$ に等しい。よって，

$$2e = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \cdots \geq 3v_3 + 3v_4 + 3v_5 + \cdots = 3v$$

を得る。つまり，$3v \leq 2e$ であり，Ⓐを用いて v を消去すると，$3(2+e-f) \leq 2e$ となる。

これを整理し，$e \leq 3f-6$ となる。　　・・・・・・・・・（注）このペーパーでは，Ⓒは使用しません。

（D）辺の両側には２つの面があるので辺を基準に面を数えると，延べ面数は $2e$ 個である。

n 角形の面（辺が n 本である面）個数を f_n とすると，$f = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots$ となる。ところで，辺を基準に面数を延べ数で数えてると $3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots$ となり，$2e$ に等しい。

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots \geq 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \cdots = 3f$$

を得る。つまり，$3f \leq 2e$ となり，同様に整理して $e \leq 3v-6$ となる。　　　　［証終］

２　単純・連結・平面グラフについて

２．１　グラフについて（導入）

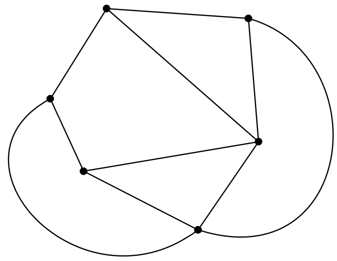


図３

グラフ　　幾つかの点を辺で繋いでできた図形

図３を参照して下さい。

単純グラフ　　次の２つの条件を満たすグラフ

（条件１）　直接２点を結ぶ辺は１本に限る。
（条件２）　辺はループを描いて同じ点には戻らない。

図４の２つの図形を含む図形は，単純グラフではない。

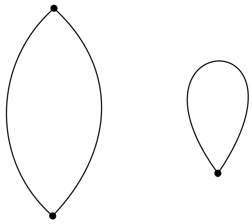


図４

連結グラフ　　任意の２点が，辺で繋がっているグラフ

図５は，連結でないグラフの例です。

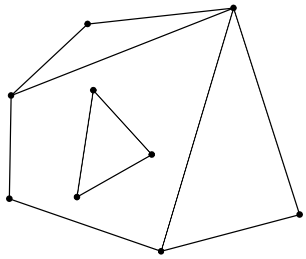


図５

平面グラフ　　うまく辺を描けば平面内に点以外で辺が交差しないグラフ

図６−1 では辺が交差している。図を描きかえると図６−2 のようになり交差しない。

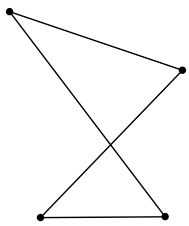


図６−1

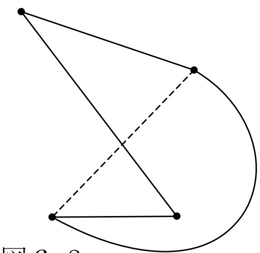
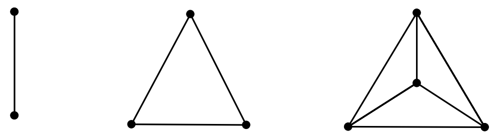


図６−2

完全グラフ K_n　　n 個の点があり，すべての点をつなぐ辺からなるグラフ

図７を参照して下さい。



K_2　K_3　K_4

図７

２．２　グラフに関する幾つかの定理

以下，グラフは，単純・連結・平面グラフを考察します。

グラフの点の個数をv，グラフの辺の本数をe，グラフの辺で囲まれた図形の個数と，図形の外側の広がりもfに数えると　$v-e+f=2$　となる。

［証明］　平面に対するオイラーの定理は，Ⓑ$v-e+f=1$であった。それに，図形の外側の広がりも面と数えるので，fがひとつ増え$v-e+f=2$となる。　［証終］

K_5は平面グラフではない。・・・Ⓔ

［証明］　K_5は平面グラフであるとする。$v=n=5$である。また，$e={}_5C_2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$である。Ⓓ の不等式　$e\leq 3v-6$　に代入すると，$10\leq 3\cdot 5-6=9$となり，矛盾する。　［証終］

単純な平面グラフは5本以下の辺しか出ていない点が少なくとも1つ存在する。・・・Ⓕ

［証明］　すべての頂点から6本以上の辺が出ているとすと，$6v\leq(\text{辺の延べ数})=2e$となる。つまり，$3v\leq e$である。これは，Ⓓの不等式　$e\leq 3v-6$に矛盾する。　［証終］

３　平面上の地図の色分けについて

地図の１つの領域を「国」と呼び,「国」に飛び地などはないとします。また，点で接している「国」は同じ色で塗り分けてよいとします。また,「国境」にあたる辺は，単純な線であるとします。

注意　※１　「和田の湖」のような境界を持っていないとします。
「和田の湖」とは，無限回の操作を含む方法で境界を定める病的な境界線

どんな地図も5つ以下の「国」にしか囲まれていない「国」が存在する。・・・Ⓖ

[証明]　単純な平面グラフに関する定理Ⓕを，地図の言葉に翻訳すればよい。　[証終]

さあ，**五色問題**を証明する準備が整いました。

地図は，５色あれば塗り分けられる。・・・Ⓗ

[証明]　「国」の数Fによる数学的帰納法で証明する。$F \le 5$なら，何も証明することはない。

今，$F = n-1$のとき，地図は5色あれば塗り分けられると仮定する。このとき，$F = n$のとき，地図は5色で十分であることを示す。

Ⓖより，どんな地図も5つ以下の「国」にしか囲まれていない「国」が存在する。

このとき，４つ以下の「国」で囲まれているなら，以下の議論は，もっと単純になる。

図８

したがって，いま図８のように，ちょうど5つの「国」に囲まれている「国」Ａを考えることにしよう。

さて，Ⓔの「K_5は平面グラフではない」を地図の言葉に翻訳し，この地図に当てはめると，１から５の「国」がすべて隣接していることはない。つまり，隣り合わない2「国」が存在する。その2「国」を１と３とする。(図９)

Ａと１と３で，連合国を作る。すると,「国」の数は,ふたつ減る。数学的帰納法の仮定により，地図全体は5色で塗り分けられる。

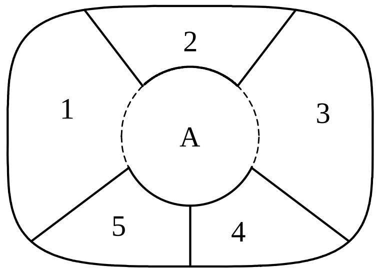


図９

したがって，元の地図でＡのまわりには,「国」が5つしかないが，１と３には，同じ色が塗られているので，元の地図のＡのまわりの「国」は，４色で塗り分けられている。その４色以外の５番目の色でＡを塗ればよい。　　　　　[証終]

以上で,「５色定理」の証明が終わりました。とても綺麗だと思いませんか。
ここから，１００年近く，数学者達が奮闘し，アッペルとハーケンの「４色定理」の証明にたどり着いたのです。でも，コンピューターを援用した証明だったので，もっと「エレガント」な証明は，求められ続けていますね。

１８５２年１０．２３	フレデリック・ガスリー（学生）が，ド・モルガン（教授）に質問
	その日のうちに，ド・モルガンは，ハミルトンへの手紙に書いた
	３０年く経って，ガスリー（教授）は，この話は兄から聞いたと告白
	兄は，ロンドンの地図を塗っていて，気がついたそうだ
１８７８年　６．１３	ケーリーがロンドンの数学会で，再提起
１８７９年	ケンペが「証明」を提出
１８８０年	ヒーウッドが，ケンペの「証明」の誤りに気づく
	ケンペの「証明」は,「５色定理」の証明の元になっていた
１８９０年	ヒーウッドが，５色定理を証明・・・※２
・	
１９７６年	アッペルとハーケンにより，証明（コンピューターを援用）

※２　この５色定理のアイデアも，その後，多くの人の手によって，とっても分かりやすくなりました。

※１　和田の湖」については，また，別の機会に・・・m(_ _)m　　　春日井東高校　堀部和経　（改 2011/2/20）