

数学的 ビーズ編み

大同大学

堀部数学模型研究所

堀部 和経



ほりべ かずのり

URL <https://horibe.jp>

堀部和経と申します。

現在、大同大学の非常勤講師をしています。

また、個人的に堀部数学模型研究所代表を名乗っています。

そして、このURLが、私のWEB-SITEです。

<https://horibe.jp>

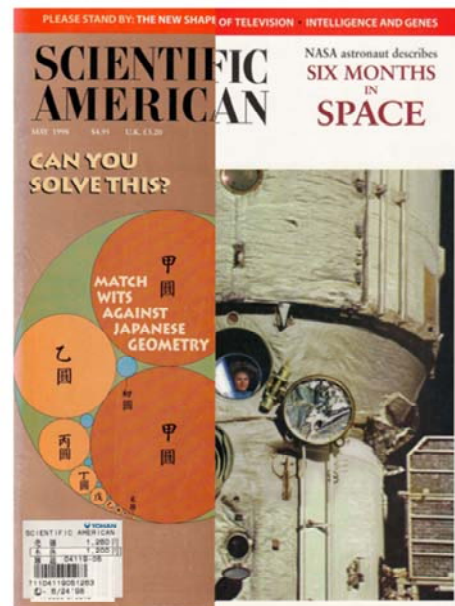
さあこれから、スタートしましょう。

和算 と 算額

この問題解けますか？

日本の幾何学
と
知恵くらべ

サイエンス(英語版)
1998年 5月



これは、1998年5月号のサイエンティフィック・アメリカンの英語版です。

この号は、左側に縦型のカバーがついていました。

【CLICK】

そこには、この問題解けますか？

そして、日本の幾何学と知恵比べと書かれていました。

この和算の記事の冒頭部分

世界中の数え切れない習慣や伝統
の中で、日本独自の幾何学を記した
「算額」

ほど優雅で美しいものは他に見当たらない。

Of the world's countless customs and traditions, perhaps none is as elegant, nor as beautiful, as the tradition of *sangaku*, Japanese temple geometry.

【そのまま読む】

英語表記もそのまま書いておきます。

「サイエンス」の表紙カバー
の問題の全体図

算額の問題

この図の中の大きい方から数えて n 番目の青い円の半径を r で答えよ。但し, r は, 緑の円の半径とする。

算額とは

数学の問題が書かれた木製の板のことです。
この問題は, 1788年江戸にて掲げられていた。



【そのまま読む】

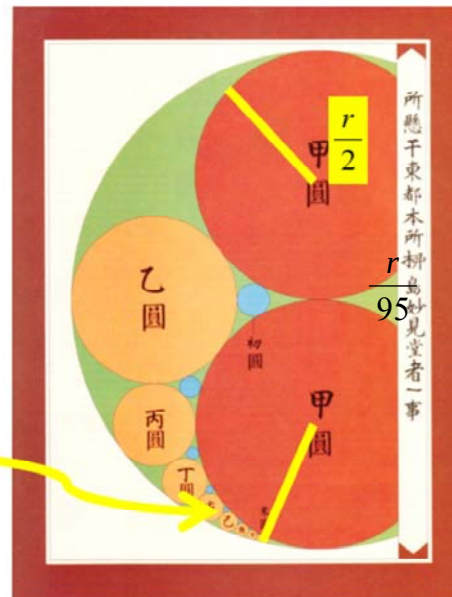
注) 赤い円の半径は同一である

ヒント? :大きい方から

5番目の半径は $\frac{r}{95}$

である。

$$r_n = \frac{r}{(2n-1)^2 + 14}$$



【そのまま読む】

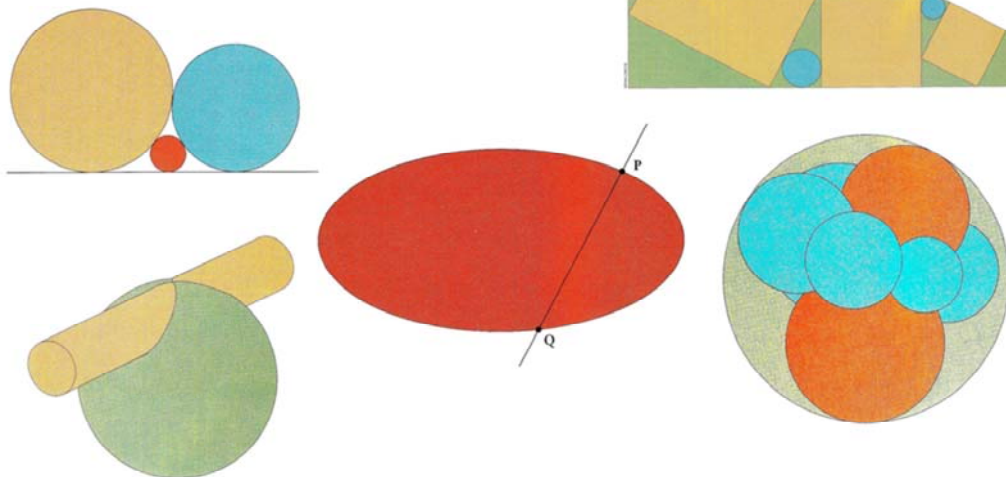
【少し、間をとる】

この問題は、今日の主題ではないので、答えを見せます。

【CLICK】

【数式を読む】

算額の問題の他の例



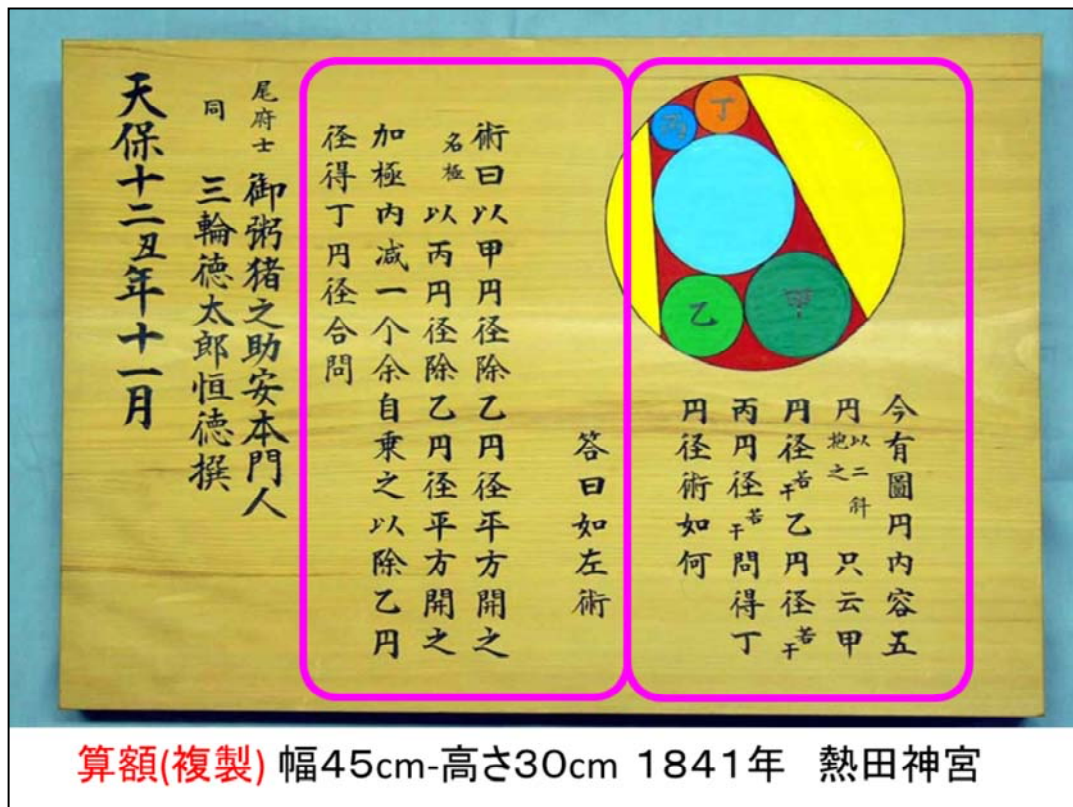
私のウェブサイト => <https://horibe.jp>

サイエンティフィック・アメリカンに掲載されていた他の問題の図です。

とても、興味深い感じがしませんか。

では、私のウェブ・サイトを少し覗いて見ましょう。

【CLICK URL <https://horibe.jp>】



とても綺麗な算額ですね。

近年復元された算額です。

名古屋にある熱田神宮の宝物館にあります。

【そのまま読む】

【CLICK】

この部分は、問題が書かれています。

【CLICK】

こちらの部分は、答えが書かれています。

そして、解法は何処にも書かれていません。



算額(複製) 幅240cm-高さ60cm

1844

愛知県名古屋市の熱田神宮にて

この大型の算額も同じ熱田神宮にあります。
先ほどの算額と比べるとはるかに大きな算額
ですね。

そして、木目も色彩も文字も綺麗です。

算額(複製) 熱田神宮宝物館会議室にて 2014-5-11



左から 園田, 山内, 金, 深川 と 堀部

熱田神宮宝物館で、実際に算額の前に立って
記念写真をとりました。

【そのまま読む】

右から、二人目はこの算額の復元尽力された
深川先生です。



実際に持ち上げてみて感じた重さは、なかなかのモノでした。

堀部氏と金氏で持って見ました。



【そのまま読む】



算額 幅330cm-高さ132cm
1830年 (実物の算額)
千葉県にある 岩井不動寺

これが、実物の算額の典型的な状態です。
色は抜け落ち、木には割れが入っています。
左の方に「シュタイナー・チェーンの図」を確認
できます。

【そのまま読む】



千葉県にある岩井不動寺

【そのまま読む】



数学を教える私塾(和算塾)の春の花見の様子

生徒は、武士階級だけでなく、
子供や女性、そして商店主な
ど多岐であった。

幅119cm-高さ37cm
1877
福井県の
石部神社にて

この算額は、色もまだまだ残っていて、とても綺麗な状態の算額です。

【そのまま読む】

この絵は、数学塾の花見の図です。

現代なら、春の遠足というところでしょう。

桜の下で、皆が楽しく過ごしていますね。

男の人は酒を飲み、女性は食事を楽しみ、子供たちは遊んでいます。

算額の左端には、3題の問題が書かれていますが、それほど難しい問題では無いようです。

【右の情報文をそのまま読む】



当時の塾の様子が分かる算額です。
中央奥の人が、先生の様です。
右下は、そろばんを学んでいます。
左下は、算数を学んでいます。
奥では先生と一緒に、方程式の解法を学んでいます。

今日紹介する問題

2つの球の半径の比を求める問題です。

外側の30個の小球の半径と、その小球に包まれるように内側に入っている大球の半径の比をもとめよ。

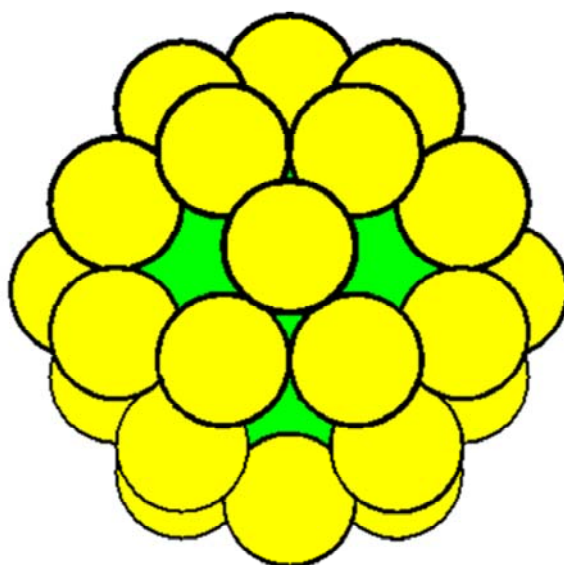


小球はそれぞれ他の4つの小球と接していて、かつすべての小球は大球と接している。

今日紹介する問題です。

この図の様に、小球30個と大球1個が出てくる問題です。

【そのまま読む】



少しの間、この動く画像を見ていてください。

こうして回転させると、立体構造が見やすくなり
ませんか。



実際に作ってみた、プラスチック製と木製の模型です。

算法助術

1841年 長谷川 弘 著

算法助術は、
約100個の
数学公式を掲載した
江戸時代の
数学公式集です。

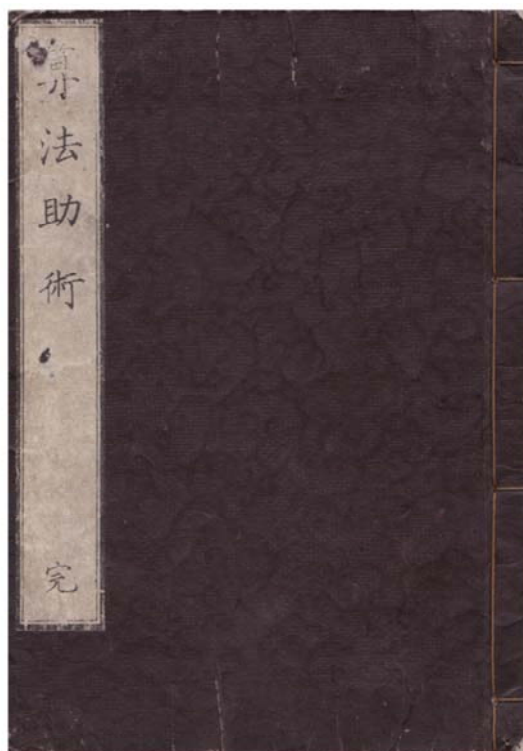


2005年(朝日新聞による)再版

【そのまま読む】

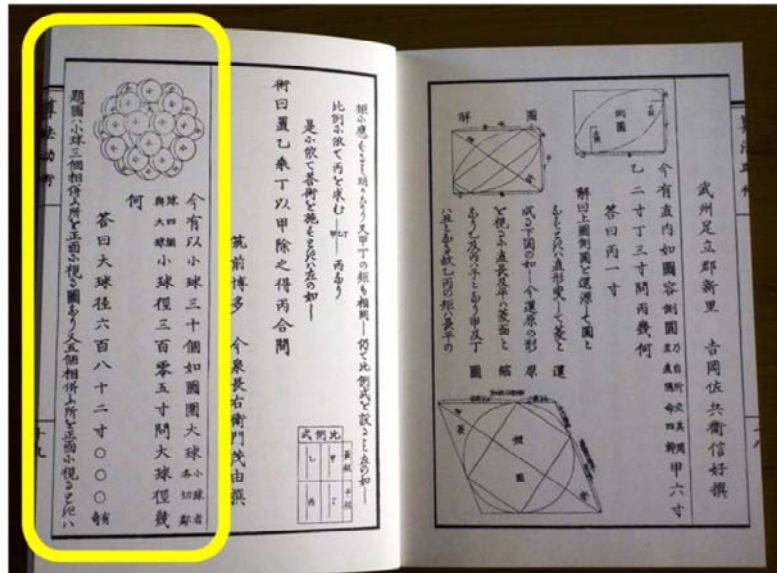
当時の
本物の
表紙

深川氏蔵



【そのまま読む】

この30球の問題は、この本の巻末にある
応用問題の例題として掲載されている。



【そのまま読む】

この問題は、ここから3ページに印刷されています。

30球の問題（算法助術の再編集図）

題圖ハ小球三個相併ふ所と正面小視る圖あり又五個相併ふ所と正面小視るどはハ左の如し
 小球各より心小至るどはハ五角一十二個三角二十個相交る切籠の形とある下圖の如し
 上圖ハ印の小球各心小隨々大球供小截るどはハ其截而即小圓十個と以て大圓を圍む形とある左圖の如し
 下の圖を按る小十角の角中径ハ五角の二距斜と全く同し故助術第三の二距斜率（小径と乘し角中径と乘し）
 小径と減し餘りハ大径と乘し是ハ依て答術左の如し
 術曰置五個開平方乘小球徑得大球徑合問

今有以小球三十個如圖圍大球各小球與大球相併小徑三百零五寸問大球徑幾何
 答曰大球徑六百八十二寸〇〇〇有奇

筑後柳河 大藪俵助茂利撰

画像を編集し、綺麗に1枚に納めた図です。
 漢文とカナが混じった文章で書かれています。

【少しだけ、そのまま読む】

【CLICK】

ここが問題が書かれています。

【CLICK】

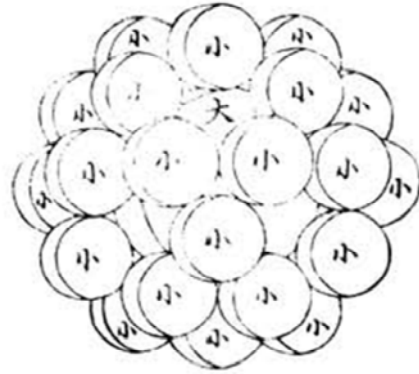
ここは、答えです。

【CLICK】

最後の部分は、解法が詳細に書かれています。
 。

【ここも、少しだけ読む】

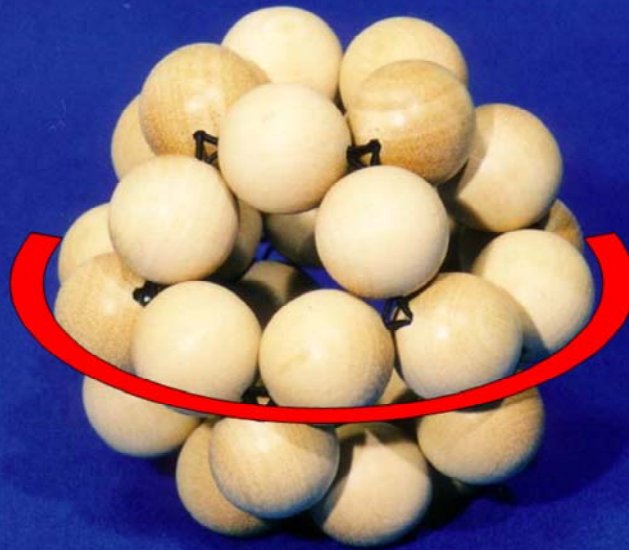
問： 小球の直径を
305寸とするならば、
大球の直径は
いくらになるか。



答： 大球の直径は682.000寸である。

【そのまま読む】

模型



赤道面で切断した断面を考える

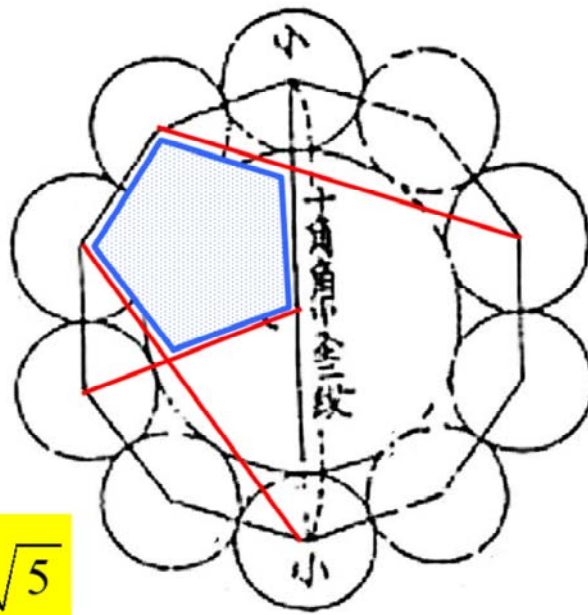
この木製の模型で考えてみましょう。

【CLICK】

図の様に、赤道面で切断した断面を考えてください。

正10角形

正5角形



$$\text{半径の比} = \frac{R}{r} = \sqrt{5}$$

3本の補助線を引く

断面を考えると、このような図が思い浮かびますね。

【CLICK】

すると、正10角形が見えますね。

【CLICK】

赤い3本の補助線を引きます。

【CLICK】

正5角形が見えましたか。

【CLICK】

【そのまま、数式を読む】

算法助術の解法

(算法助術の公式 3 を用いると)

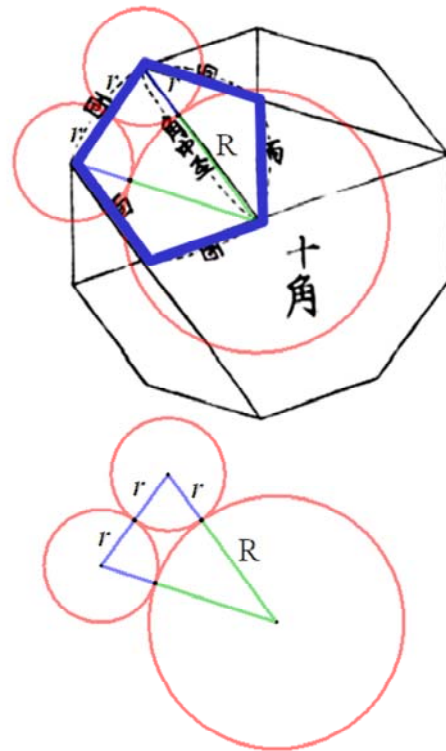
$$\frac{\text{角中径}}{\text{面}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\text{対角線}}{\text{辺}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{r+R}{2r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1 + \frac{R}{r} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{よって } \frac{R}{r} = \sqrt{5}$$



算法助術の公式は100以上あるのに、3つ目の公式を使って解いています。
それは正五角形の対角線と辺の比が「黄金比」であるという公式です。

【CLICK】

現代の用語に変換します。

【CLICK】

正五角形を消します。

【CLICK】

3つの円と3つの辺を書き加えます。

分かりやすいように、上下2つ同じ図を描きます。

すると、辺は $2r$ で、対角線は $r+R$ となります。

【CLICK】

両辺2倍し、

【CLICK】

こうなると、1引くだけです。

【CLICK】

ほら、求めたい値が得られました。

すごく簡単に問題が解けました。

この値は変？！ r, R : 半径, d, D : 直径

$$d = 2r, D = 2R$$

小球の直径 $d = 305$ 寸

大球の直径 $D = 682.000\cdots$ 寸

1 寸 $\doteq 30.3$ mm (日本)

$$d = 9\text{ m } 24\text{ cm}$$

$$D = 20\text{ m } 66\text{ cm}$$

この値は模型として大きすぎる!!

しかし、問題に出てくる2つの数値は、変ですよ
ね。

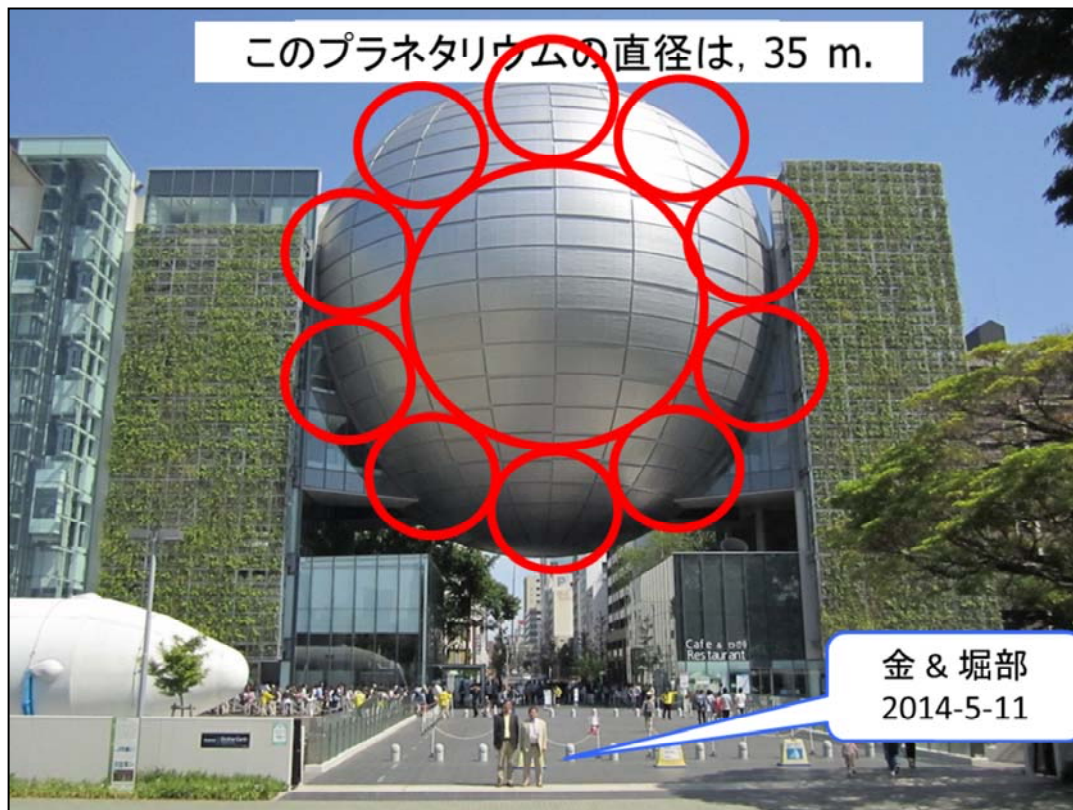
1寸は約3cmなので、 d は9mを超えてしまいま
す。

実際に計算すると、

【CLICK】

どうですか、小球で約9m、大球だと20m越で
す。

【そのまま読む】



名古屋市にある科学館のプラネタリウムです。

【CLICK】

【そのまま読む】

【CLICK】

どうでしょう。この大きさの模型を計算していました。

【CLICK】

ここに、2人の人が立っています。

比べてください。

模型の巨大さが分かりますよね。

値は $\sqrt{5} = 2.236068\dots$, $\frac{682}{305} = 2.236066\dots$

**大きな整数の305と682を選んだ
理由は何なのだろうか？**

$$\sqrt{5} \div \frac{682}{305} \quad (\text{とても正確な有理数近似})$$

$$682^2 = 465,124 \quad , \quad (305\sqrt{5})^2 = 465,125$$

$$(\text{拡大})\text{Pell方程式 } x^2 - (y\sqrt{5})^2 = \pm 1$$

$$\text{解 } (x, y) = (305, 682)$$

【そのまま読む】と【CLICK】を繰り返す。

次なる疑問？

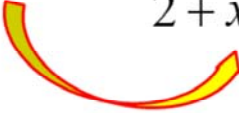
$$\sqrt{5} \div \frac{682}{305} \text{ を}$$

どうやって見つけたか？

$x = \sqrt{5}$ とおくと,

$$x - 2 = \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2 + x} \text{ となる。}$$

すると,

$$x = 2 + \frac{1}{2 + x} = 2 + \frac{1}{2 + \left(2 + \frac{1}{2 + x}\right)} = \dots$$


【そのまま読む】と【CLICK】を繰り返す。

$$x = 2 + \frac{1}{2+x} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2+x}} = \dots = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4+0}}}}}$$

零約術 $\dots = 0$ と置きかえる
(江戸時代の計算テクニック)

$$\begin{aligned} x &\doteq 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{4}{17}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{17}{72}} \\ &= 2 + \frac{72}{305} = \frac{682}{305} \end{aligned}$$

先ほどの代入を繰り返すようになります。

【CLICK】

江戸時代のテクニックの零約術を使います。

$\dots$ は、0に近いので、0としてしまいます。

【CLICK】

と、ここを0にすると...

【CLICK】

Xの値はこうなり、分数を計算し、682と305が得られます。

こうして、大きな2つの数を得ることが出来ました。

注釈:

この問題は1798年に石川永政が、江戸の牛頭(ごず)天王社に掲げた問題である。

石川永政は馬場正統の生徒であった。

馬場正統の息子の馬場正督(1801-1860)は「算法奇賞」(1830年)を著した。

「算法奇賞」は、江戸の神社に掲げられていた36編の算額の収集本である。

【そのまま読む】

したがって、この問題は、1798年に
数学の問題として存在していた。

①算額(Sangaku) 1798

東京都四谷区牛頭天王社 馬場正督の門人・石川永政

②算法奇賞(Sanpo-kishyo)1830

正督の息子・馬場正統

①②は、問と答えのみ

③算法助術(Sanpo-jyojutsu)1841

長谷川弘閑

③は、解答の解説あり

【そのまま読む】

個人的メモ

算額(Sangaku) 1798

東京都四谷区牛頭天王社 馬場正督の門人・石川永政

算法奇賞(Sanpo-kishyo)1830

正督の息子・馬場正統

算法助術(Sanpo-jyojutsu)1841

長谷川弘閑

【無音】

主題
数学的ビーズ編み

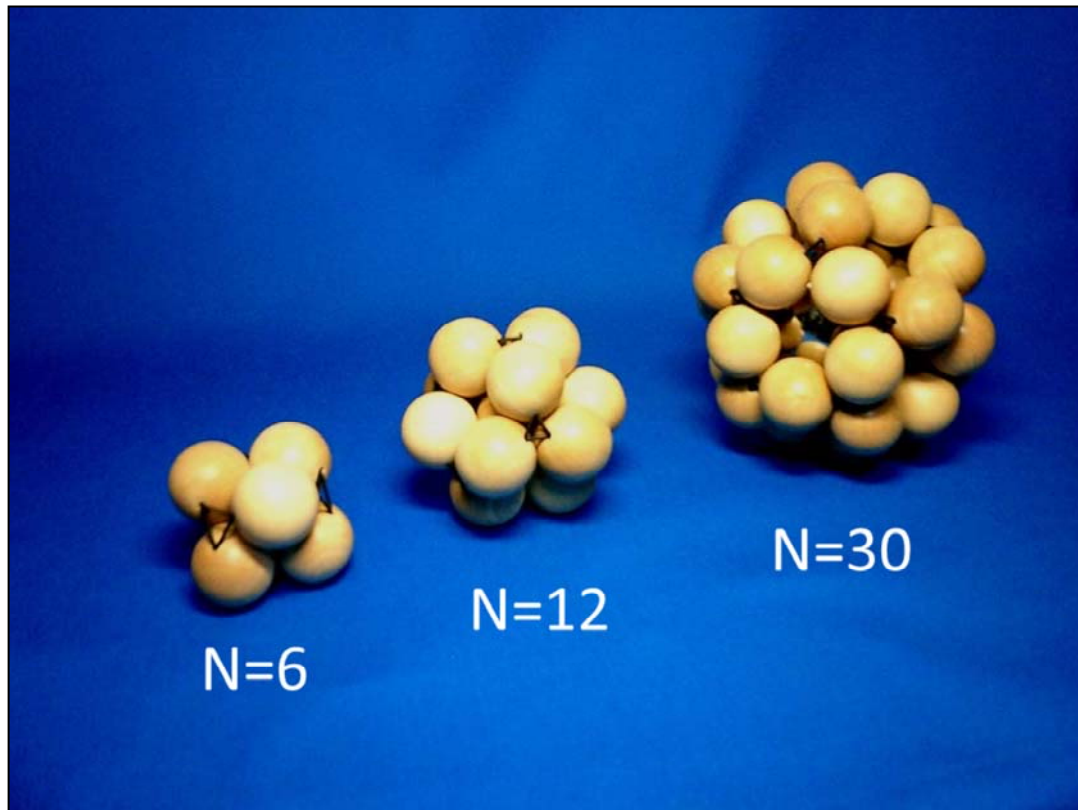
この私の仕事は
数学???
or
趣味???

さて、ここからが、本当の主題

「数学的ビーズ編み」がはじまります。

これから紹介するこの私の仕事は、数学と言って良いのでしょうか。それもと、趣味というのでしょうか？

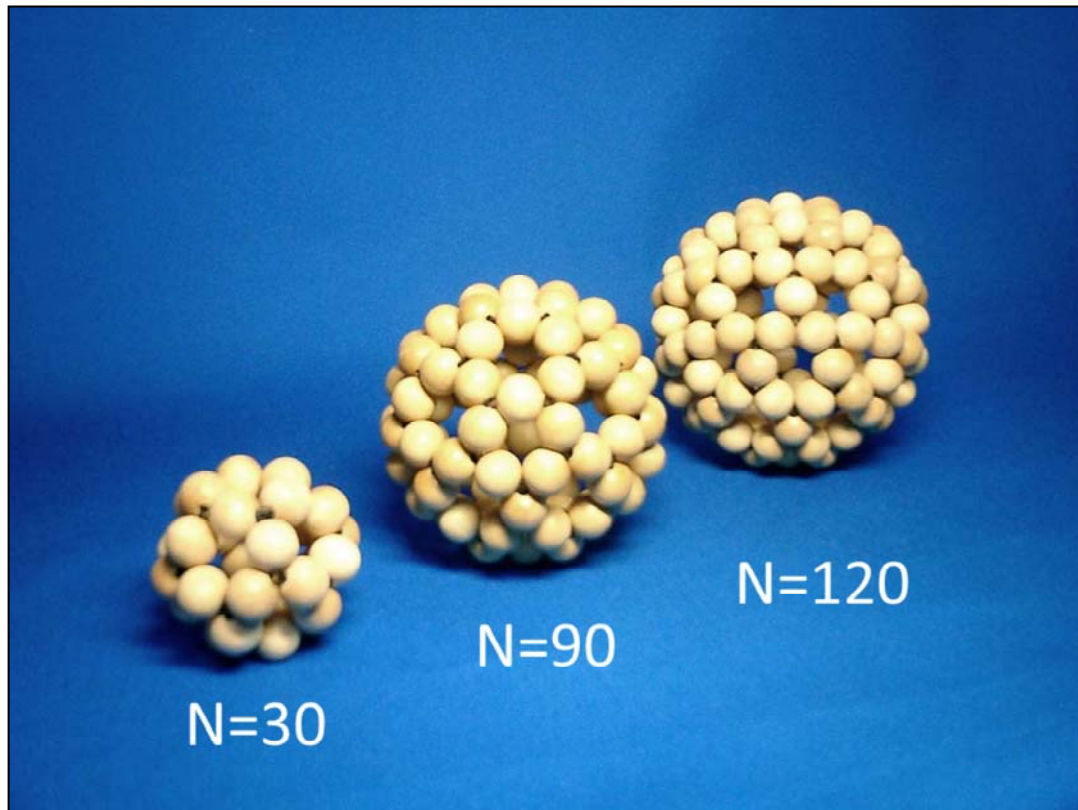
では、始めます。



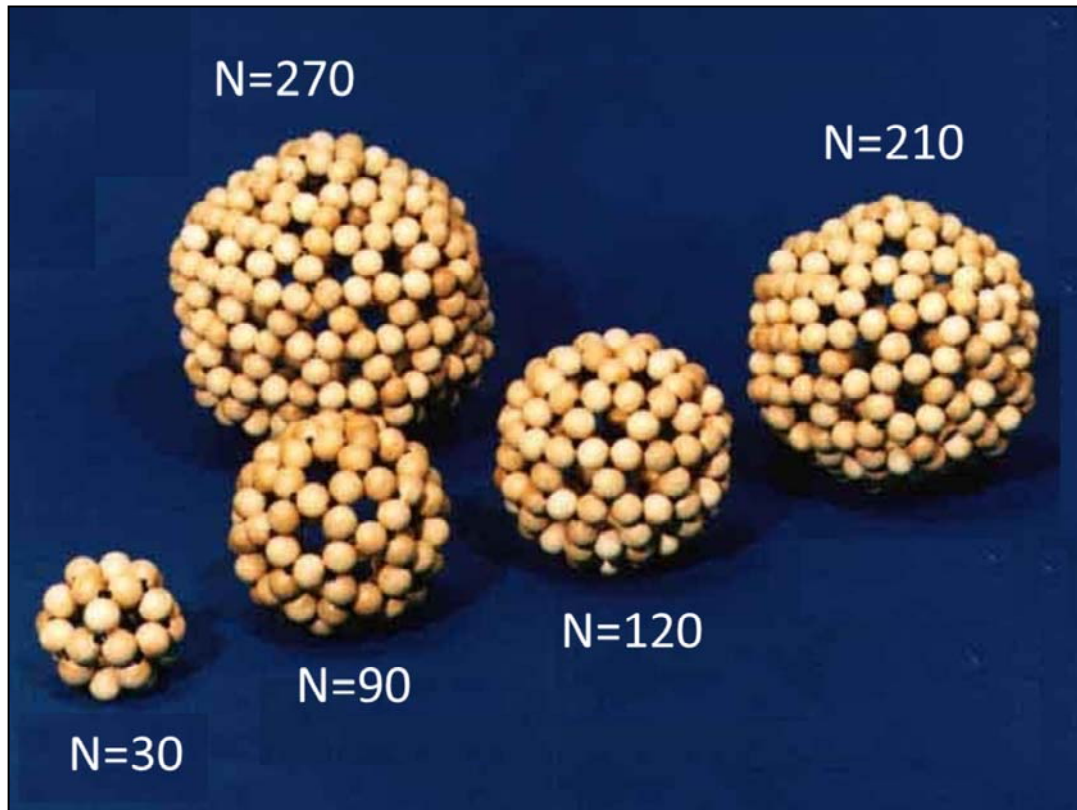
右端の模型が、今考えていた30個の球の問題の模型です。

木球の個数を減らして模型を作れます。

簡単ですね。



個数を、30個から、90個、120個と増やしても簡単でした。



続けると、210個、270個となります。

直線的な形



簡単すぎる！

直線的な立体構造も作れます。

【CLICK】

簡単です。

らせん形



3次元構造が作りたくなり、らせん形を作りました。



途中で枝分かれしたモノを作りたいとなりました。
Yの字形の構造も簡単でした。

環状(リング)



次は、リング構造も考えました。
これは1995年の夏頃でした。

その他の環



その後、いろいろなタイプのリング構造も作れるようになりました。



小さなリングを作りたいくなり、作ってみました。
私の指の太さに問題があるようで、・・・。
少し、難しかったです。

紅珊瑚



綺麗なリングを作って見たくなり、紅珊瑚を使ってみました。

美しい輪が完成しました。

3色リング

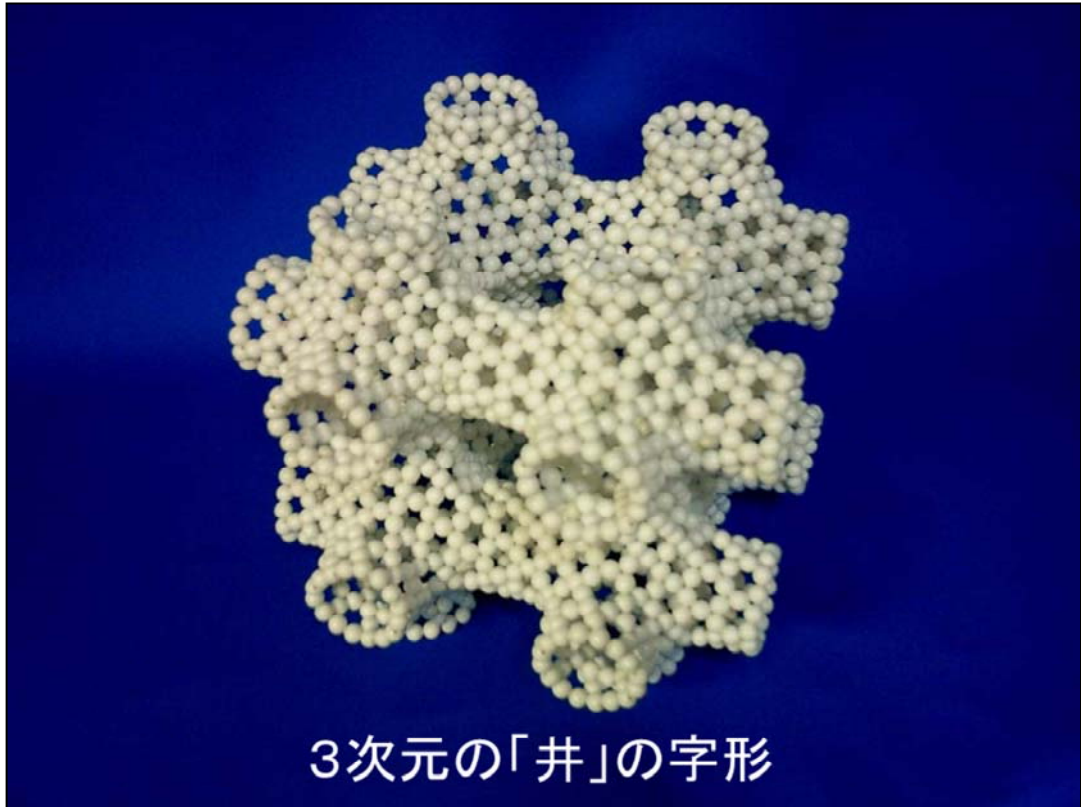


お互いに絡み合った、3色のリング構造も綺麗にできあがりました。

直交座標系のような形



【そのまま読む】



3次元の「井」の字形

【そのまま読む】

テトラポッド形



【そのまま読む】



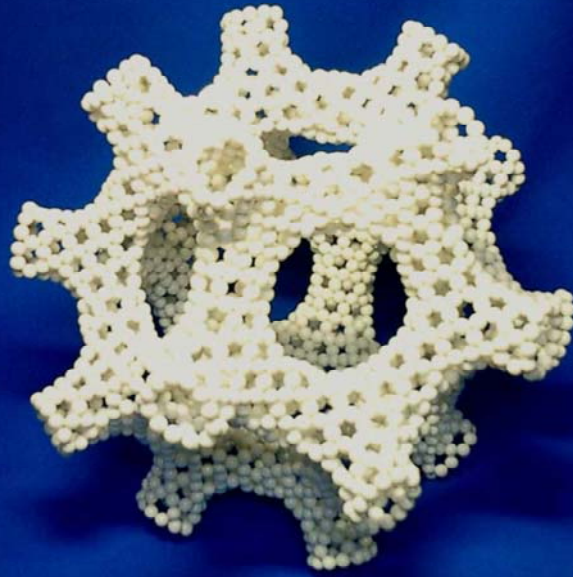
【無音】

テトラポッド形を連続的に



【そのまま読む】

角のある正12面体



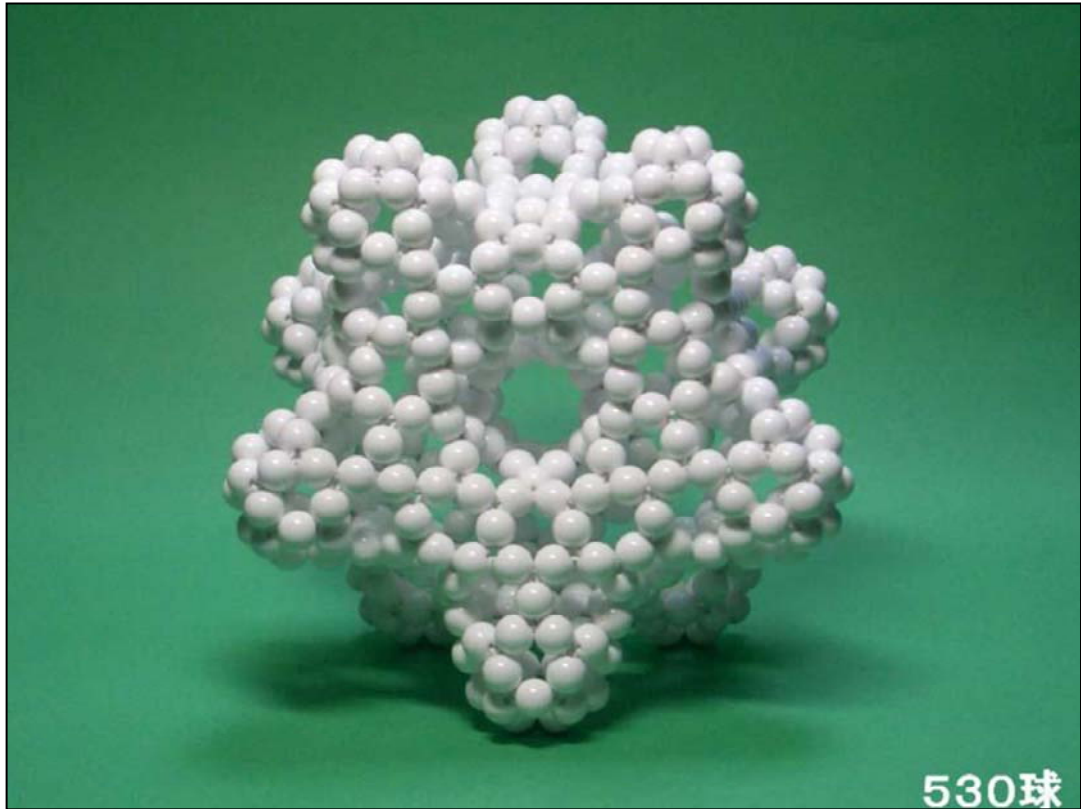
【そのまま読む】



【無音】【CLICK】

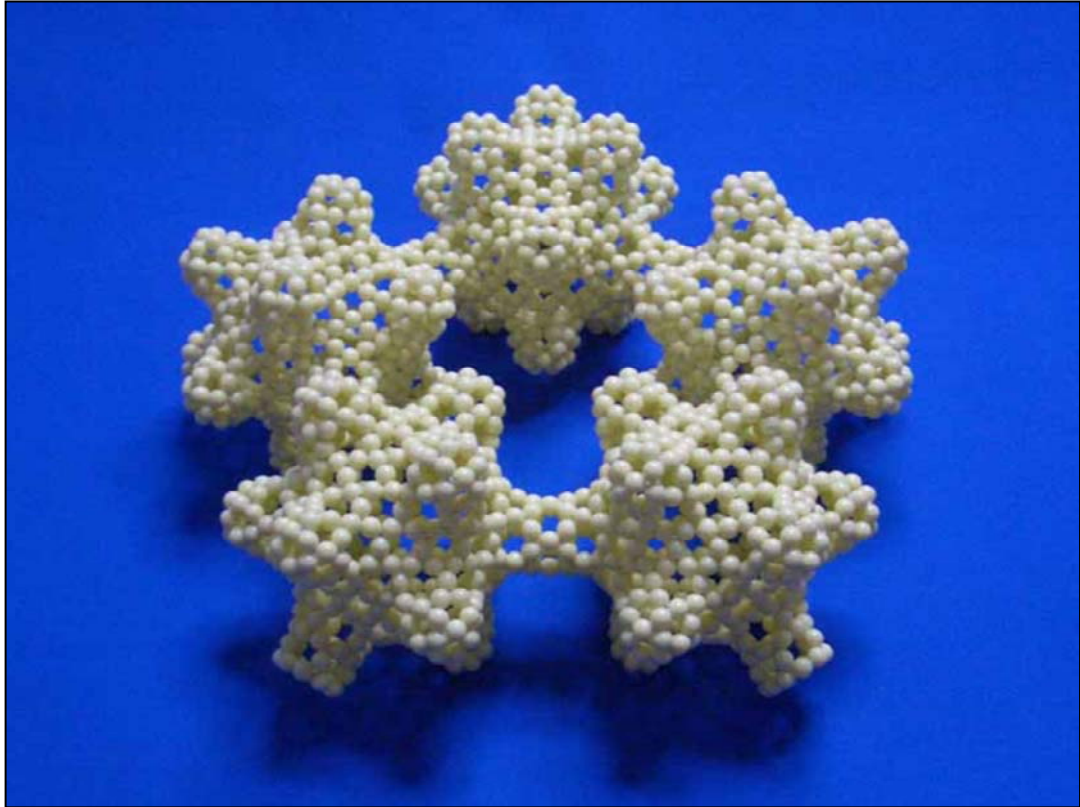


【無音】【CLICK】



530球

【無音】



【無音】



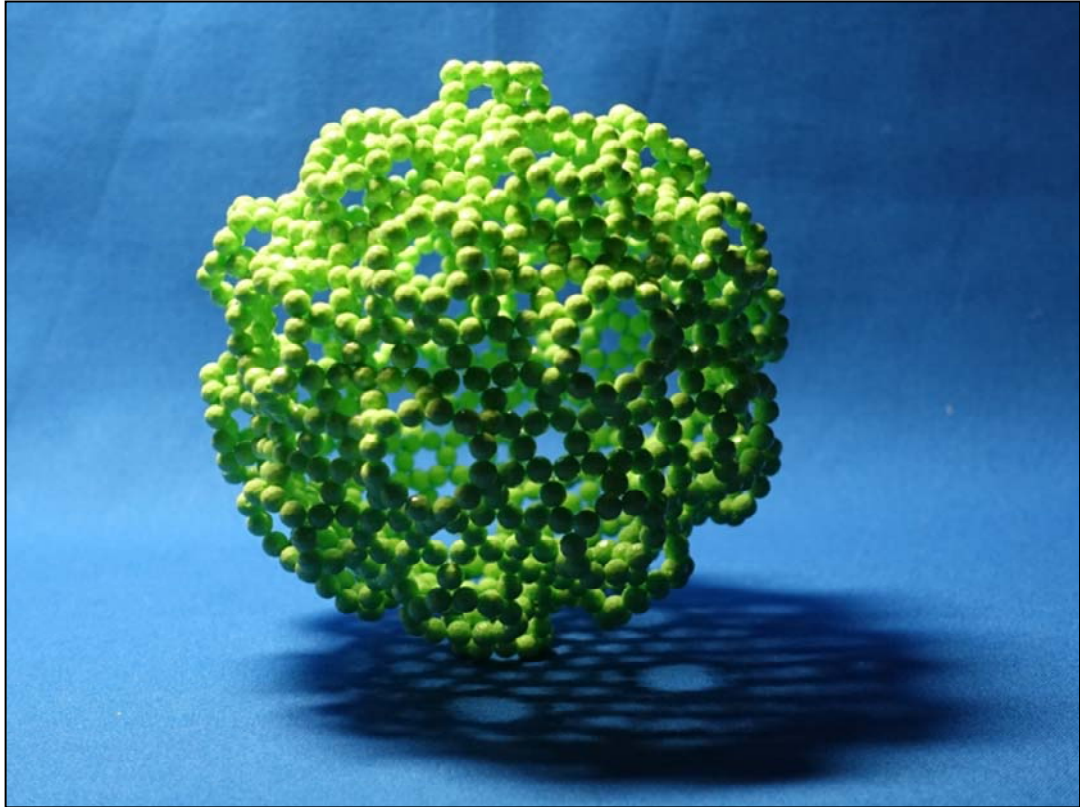
この写真は、壁紙用として作った写真です。
このプレゼンの最初のページの壁紙として使っていました。



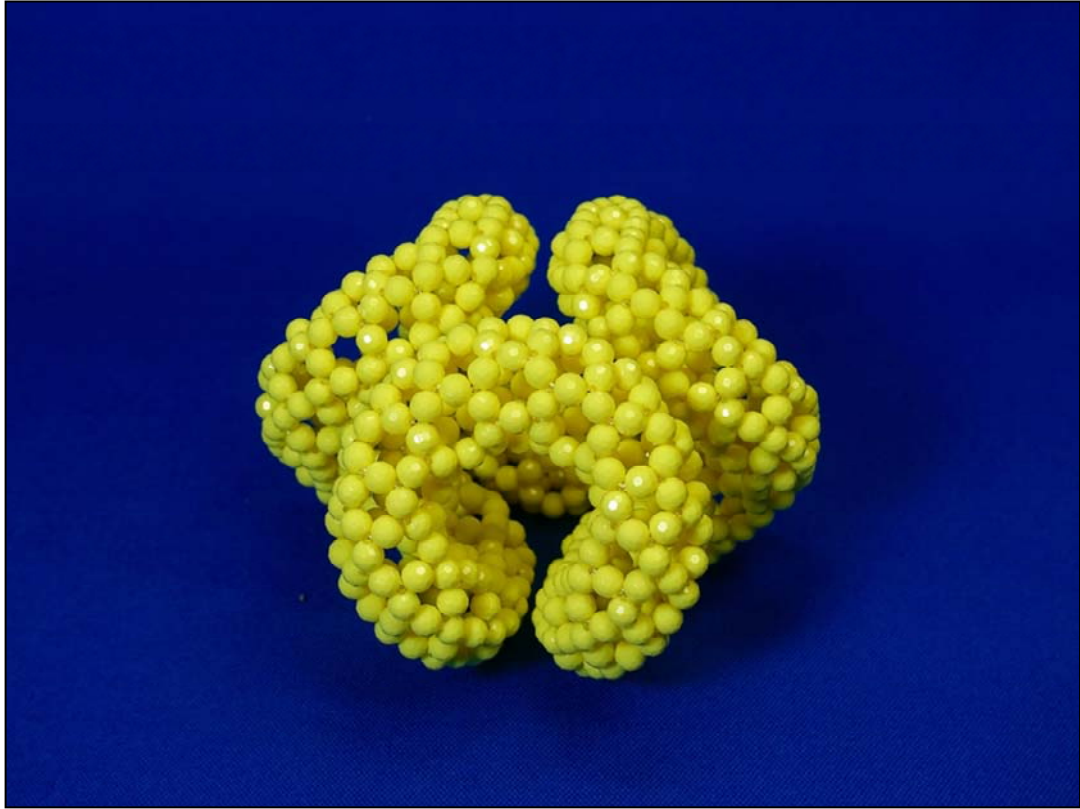
謹賀新年ならぬ、謹賀新世紀と書いた2001年用の年賀状の写真です。

【CLICK】

私の2000年の秋の頃の顔ですね。



【無音】



【無音】



【無音】



右ねじりと左ねじりの2種の $(2, 9)$ トーラス.



【無音】

数学的ビーズ編み

30個の球の模型の作り方

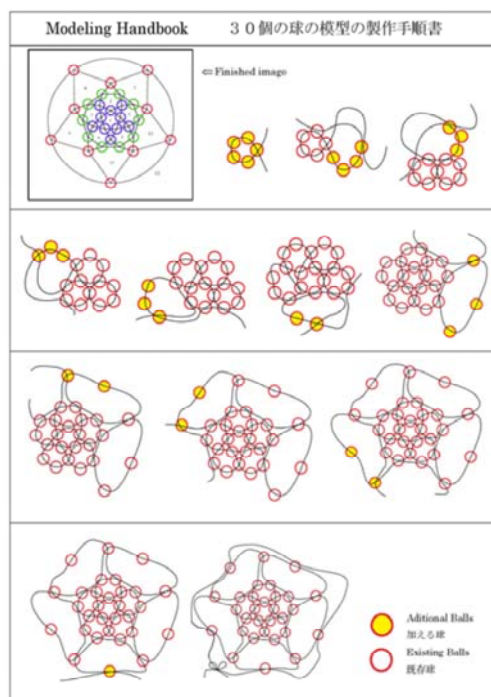
堀部 和経



ほりべ かずのり

URL <https://horibe.jp>

【そのまま読む】



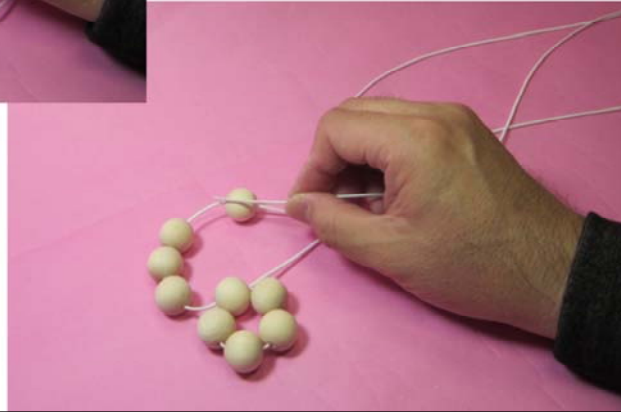
[ModelingHandbook.pdf](#)

編み方を説明するプリントです。
リンクをクリックするとPDFが開きます。

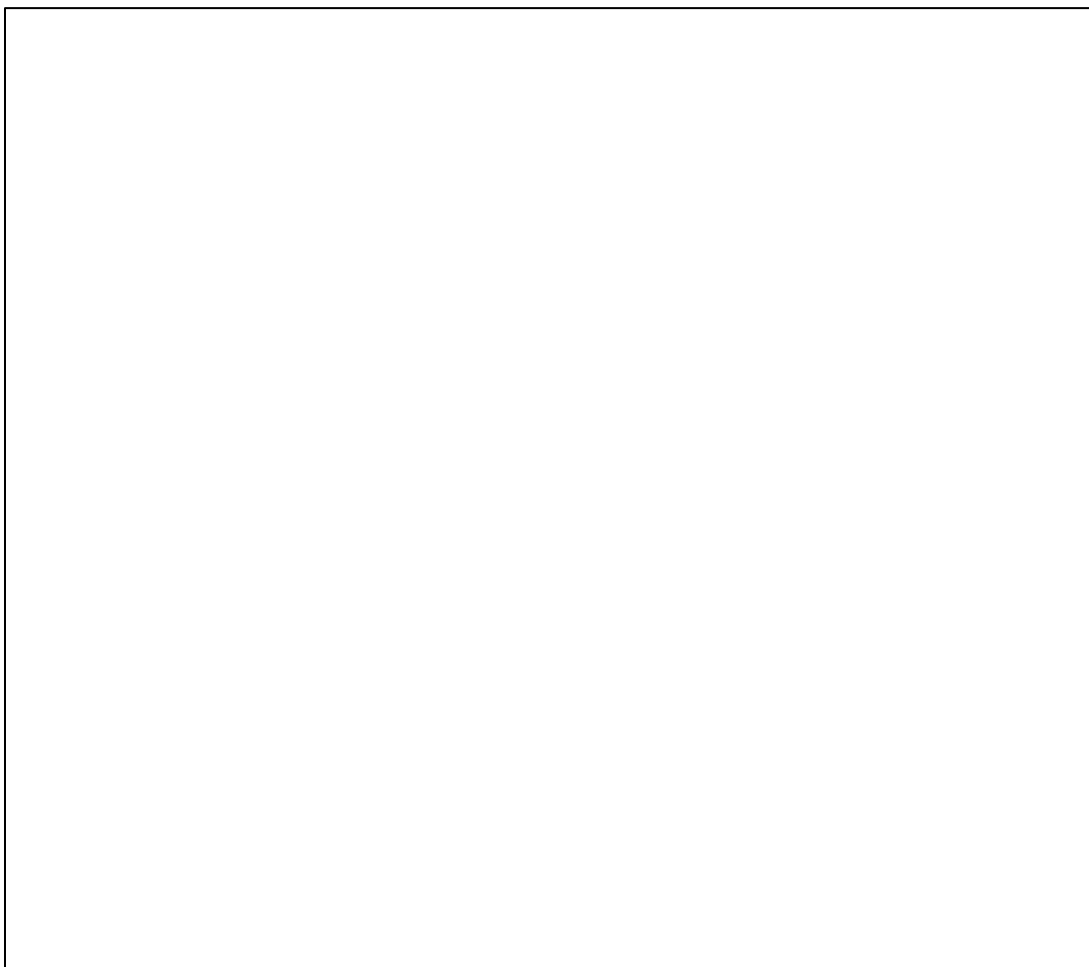
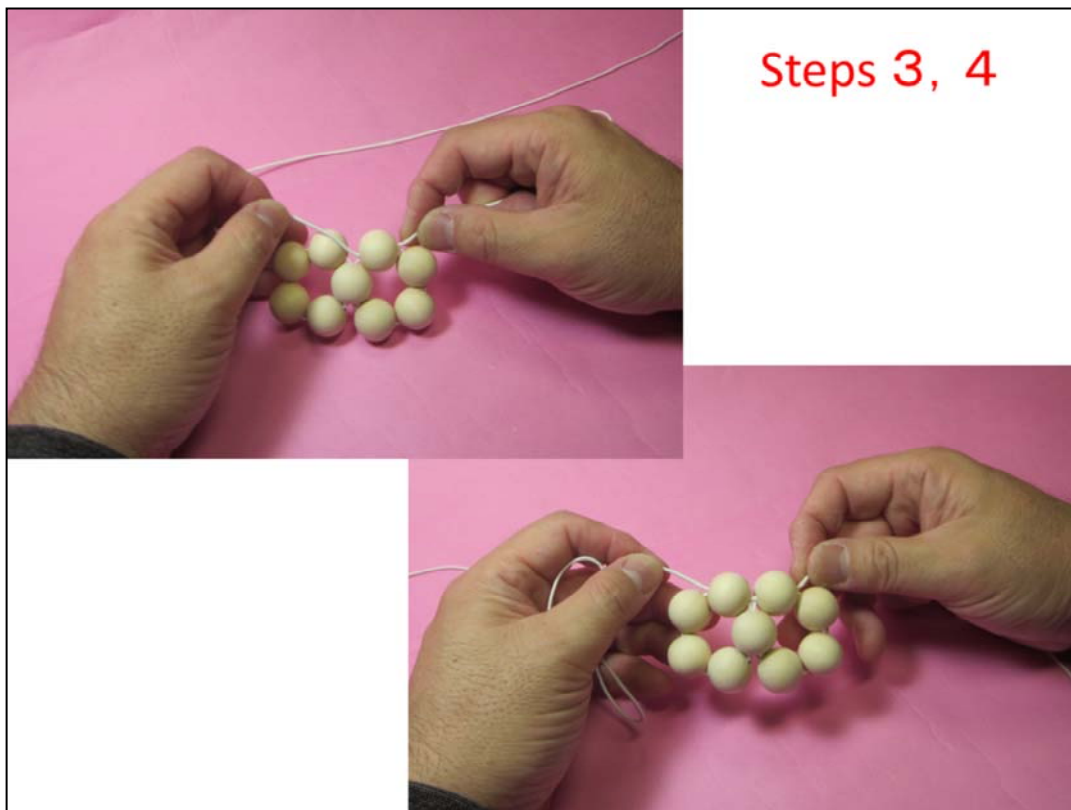
ビーズの編み方の紹介です。

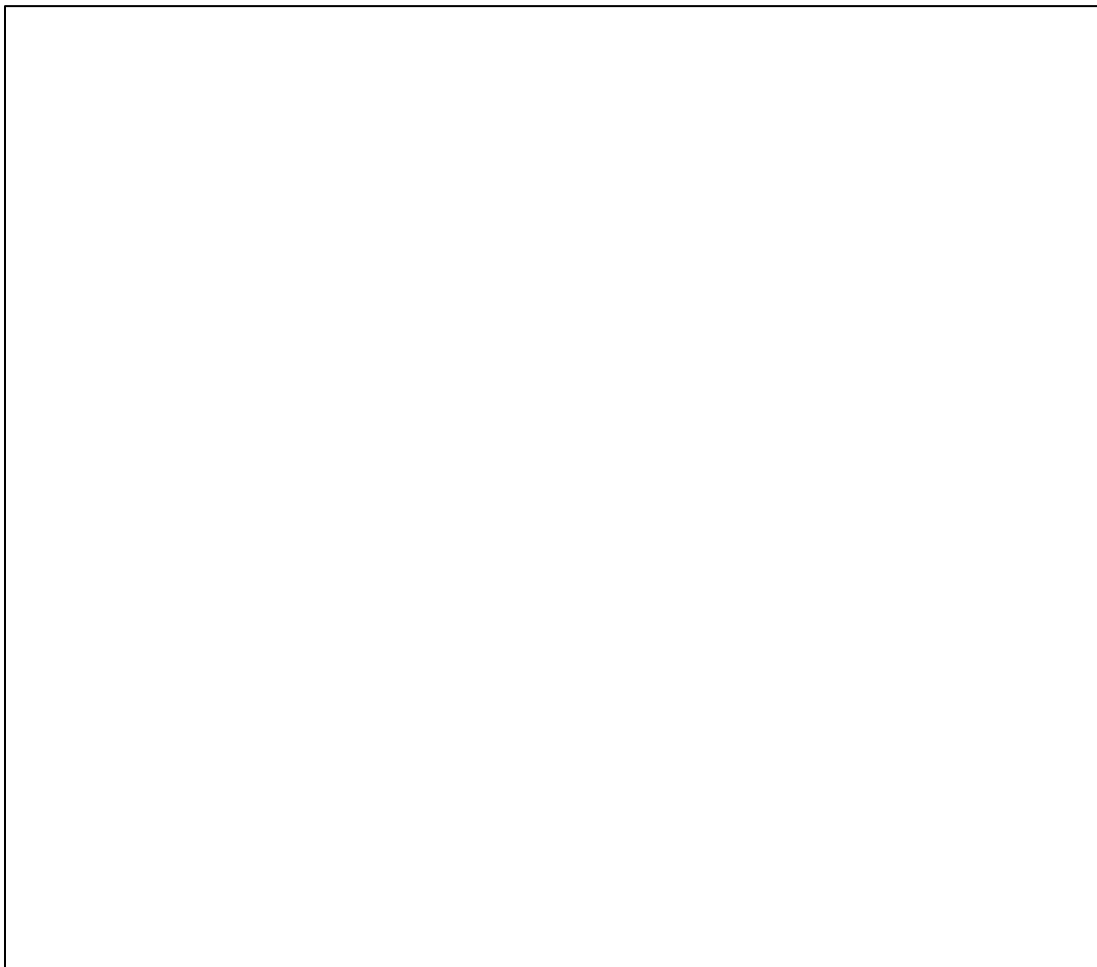


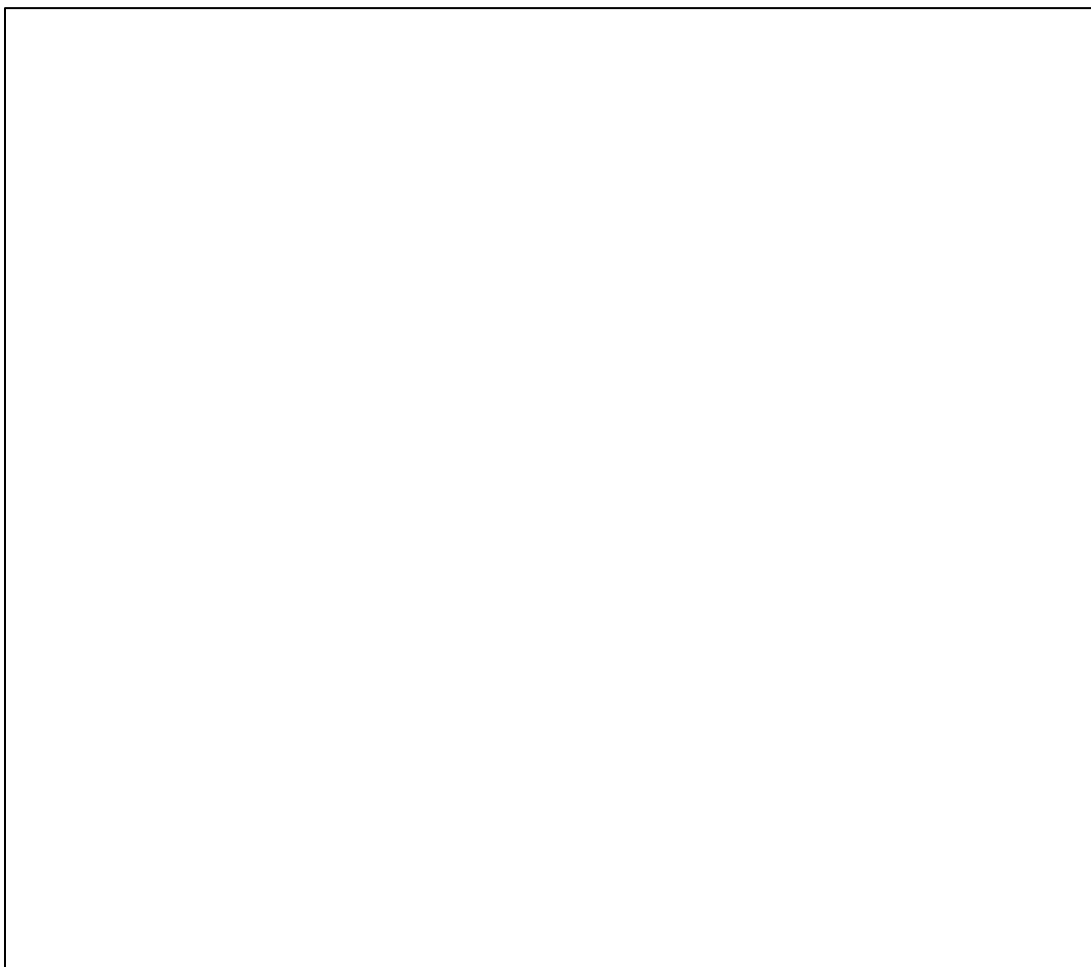
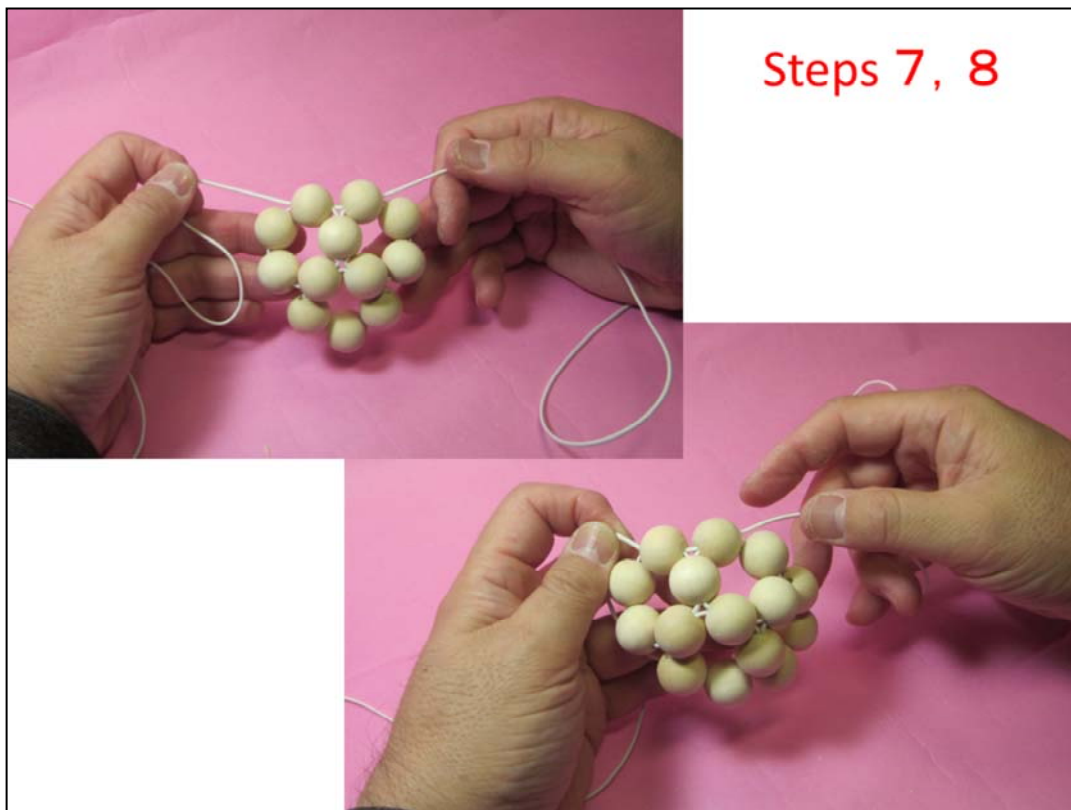
Steps 1, 2

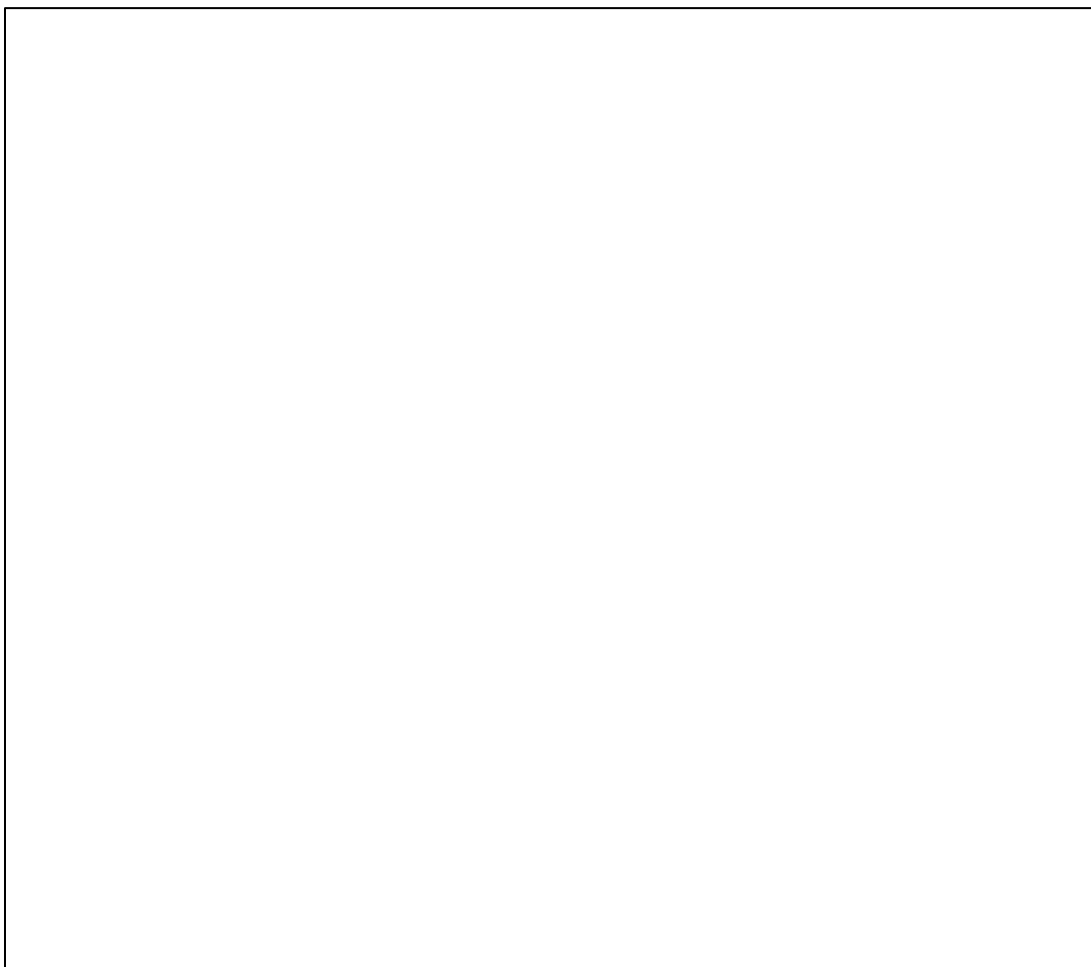


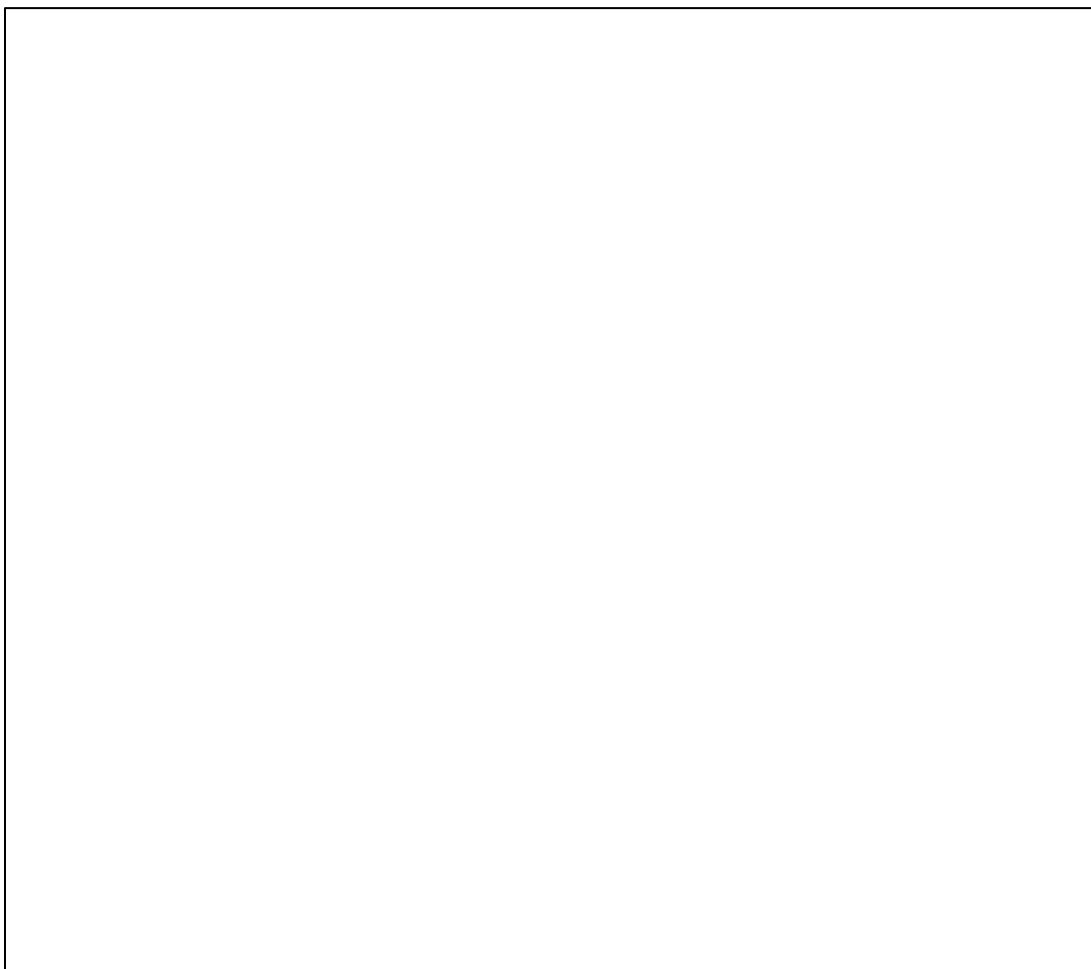
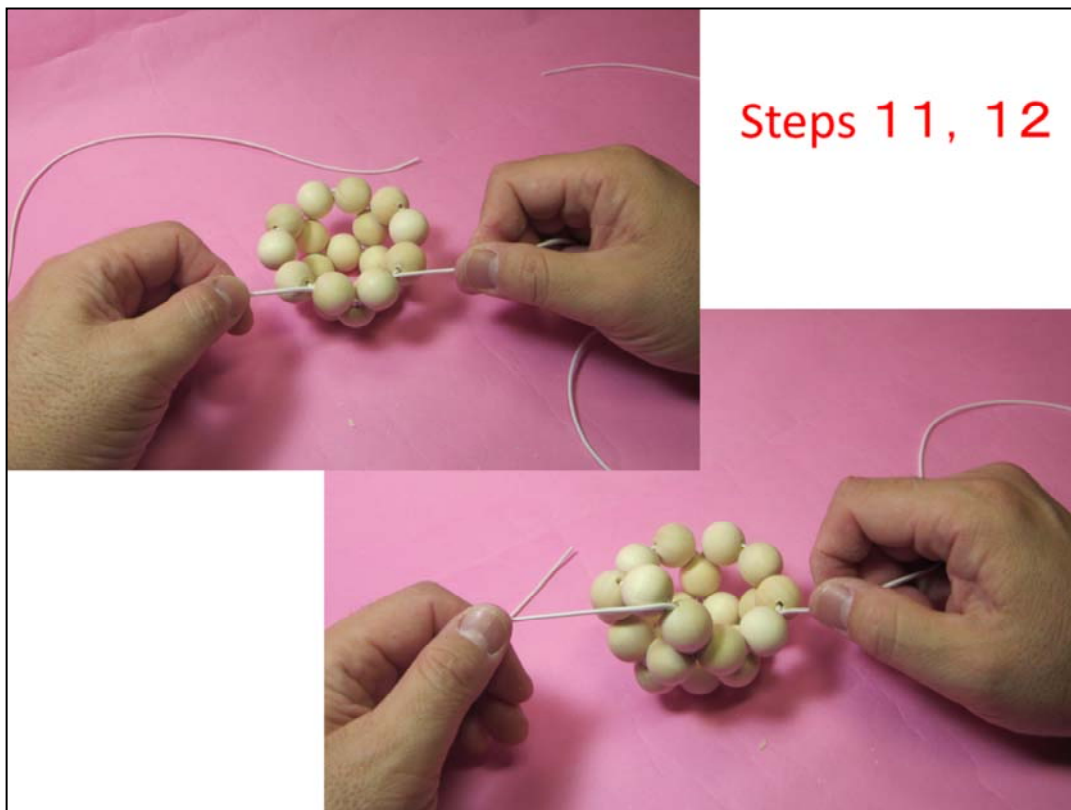
ここからは、編み方を説明しています。

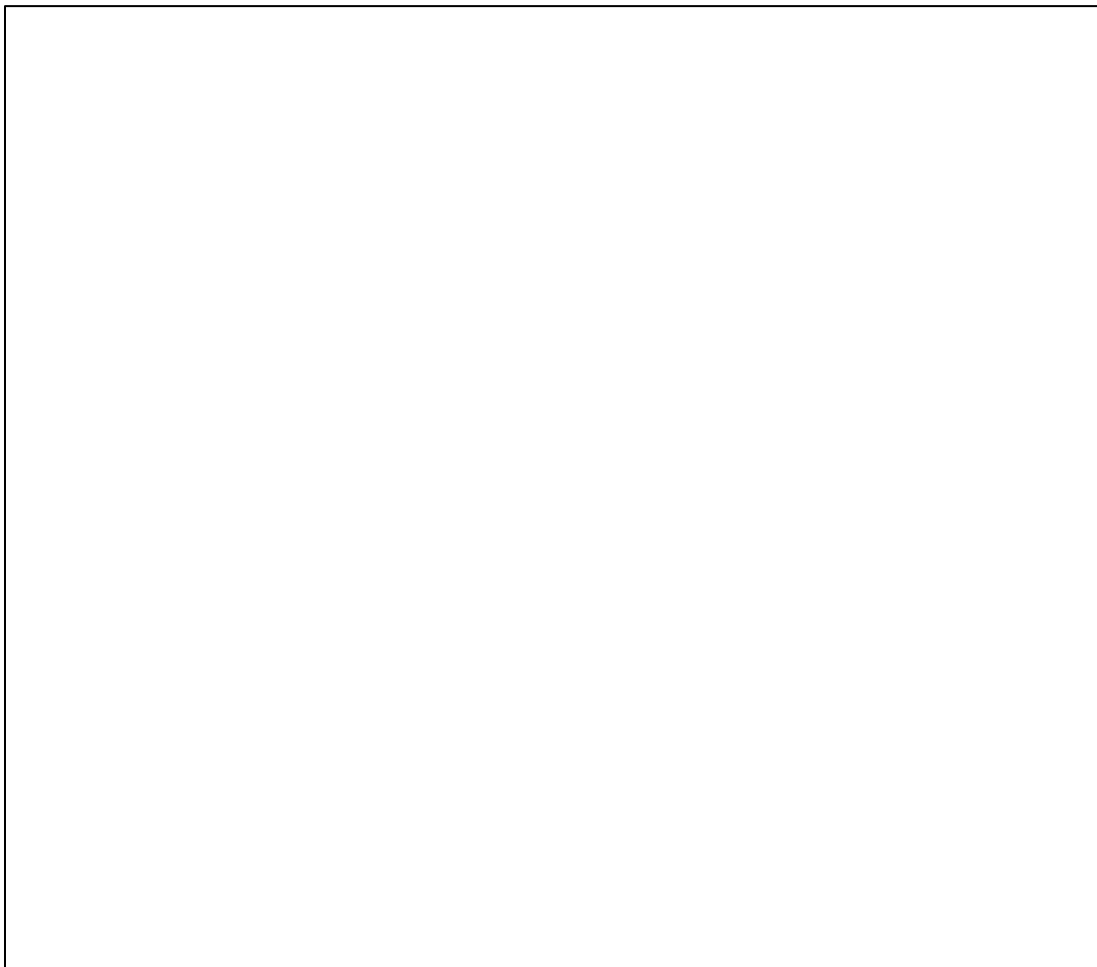
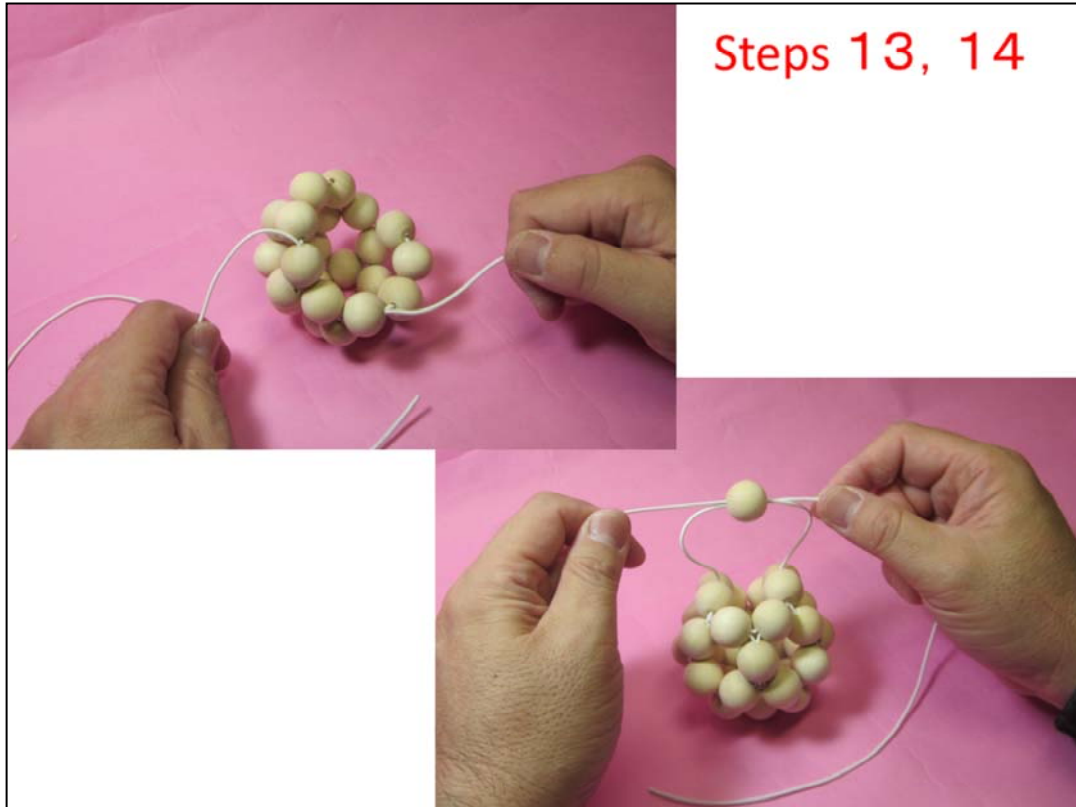


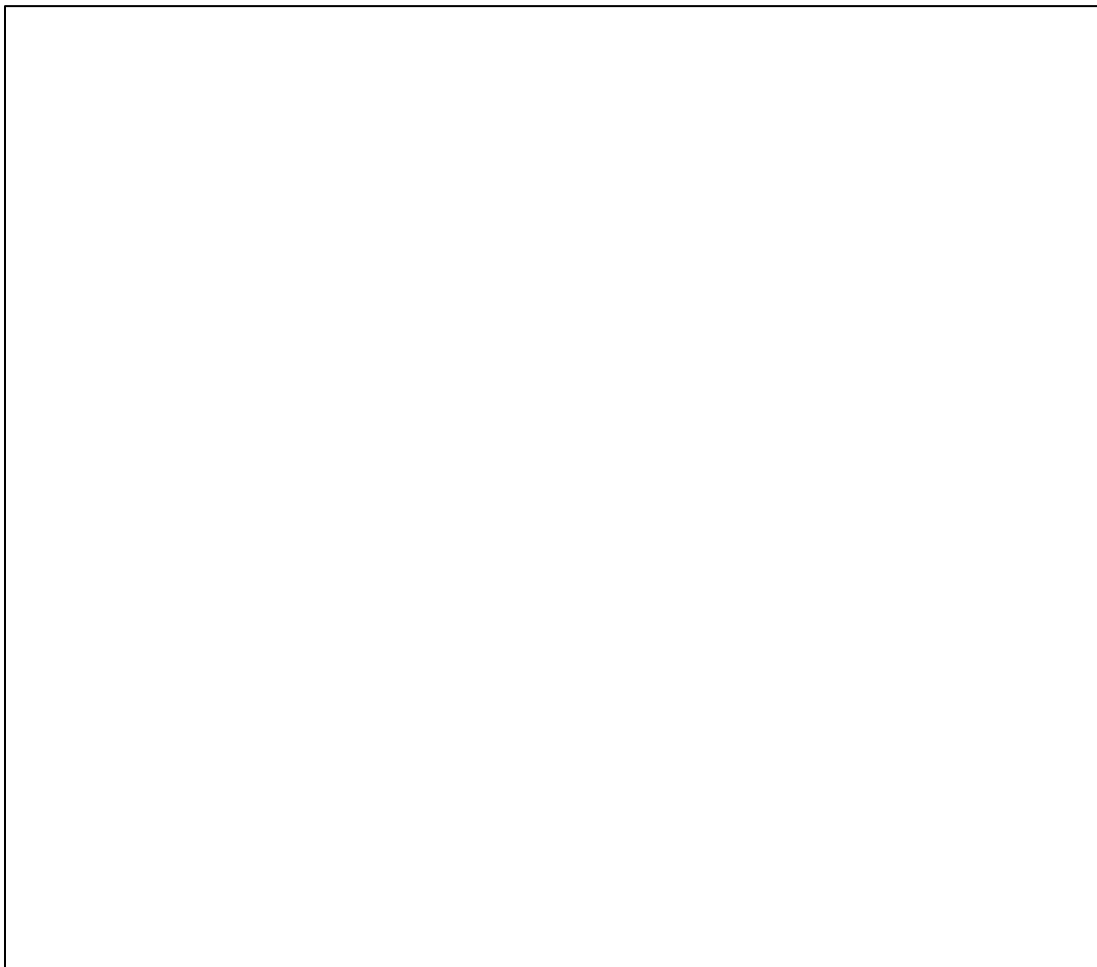










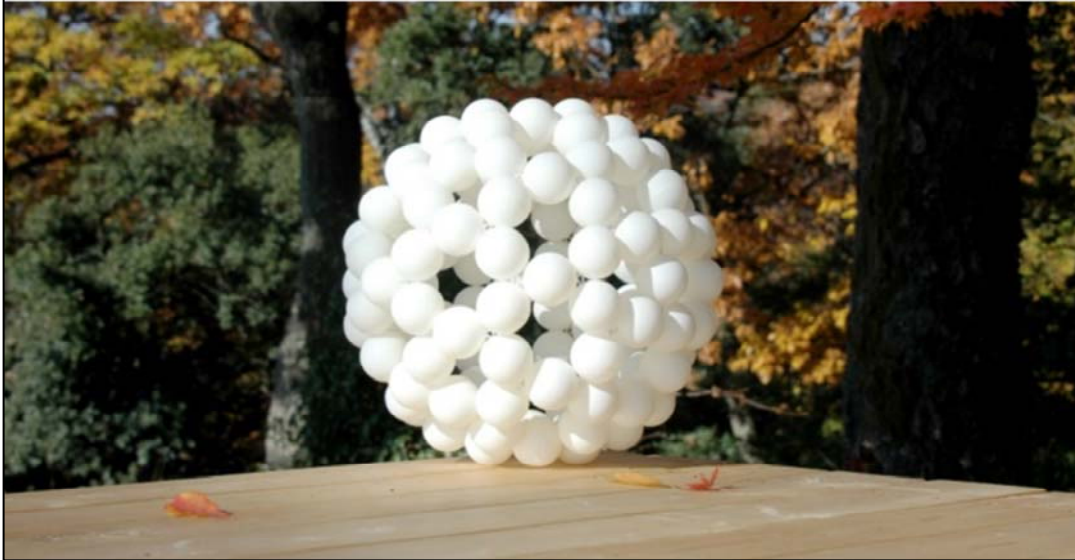




【URLの説明】

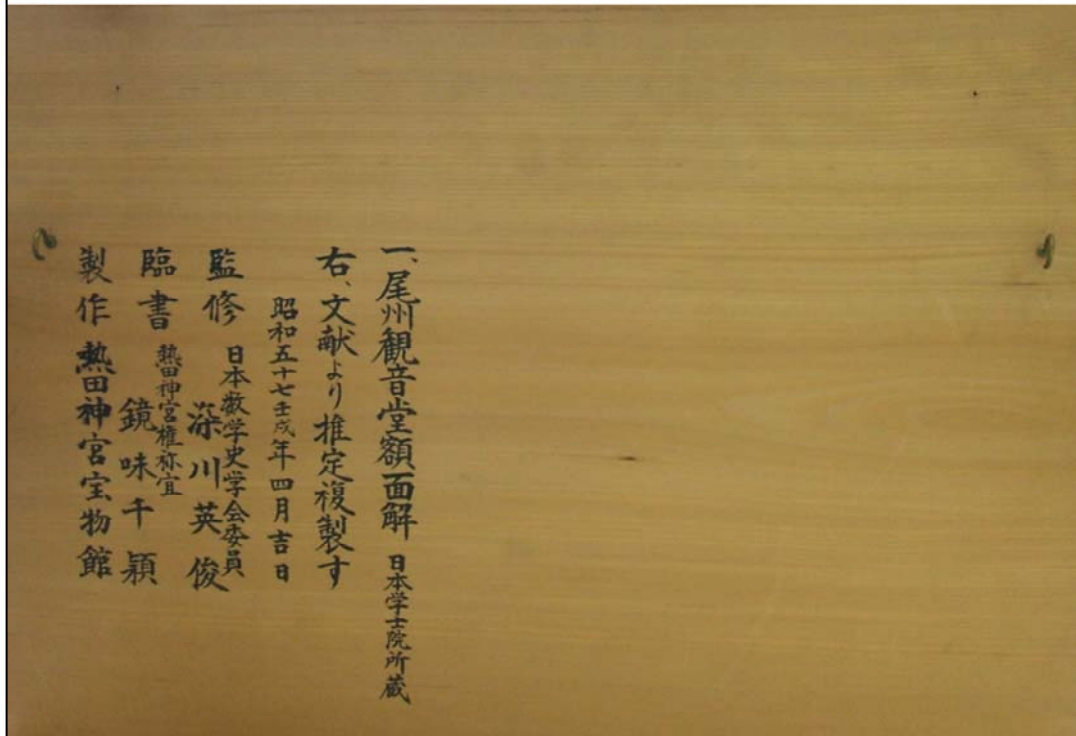
大切な模型のひとつ

何も印刷されていない卓球のボールを使用
Nittaku(株)さんのご厚意に感謝して



【そのまま読む】

熱田神宮の算額の裏面の文字



最初の方で紹介した複製算額の裏書きです。
深川英俊氏の名前が読めますね。

同裏面



同じく、大きな算額の裏書きです。