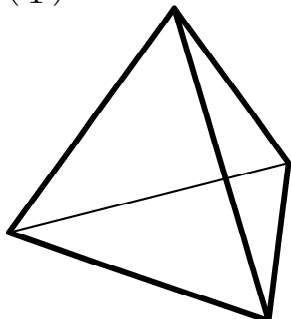


[1] 多面体の頂点数・辺数・面数の関係

v :頂点数, e :辺数, f :面数 (*vertex, edge, face*)

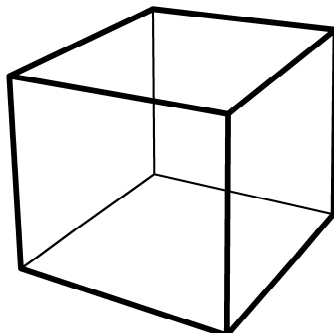
・次の多面体の (v, e, f) を調べよう

(1)



$$(v, e, f) = (\quad , \quad , \quad)$$

(2)



$$(v, e, f) = (\quad , \quad , \quad)$$

(3) 自由な多面体

(1)	(2)	(3)
$v - e + f =$	$v - e + f =$	$v - e + f =$
$=$	$=$	$=$

[2] 穴のあいた多面体の場合次の様な関係式が成り立つ。

穴の数を k とすると,

$$v - e + f = 2 - 2k \quad \dots \textcircled{1}$$

という等式が成り立つ。

さて、先週見た数学的ビーズ編みの構造をこの定理を使って調べてよう。

数学的ビーズ編みは、ビーズの形が5角形、6角形、7角形だけで出来ている。

f_5 : 5角形の個数, f_6 : 6角形の個数, f_7 : 7角形の個数

とすると次の等式が成り立つ。

$$f = f_5 + f_6 + f_7 \quad \dots \textcircled{2}$$

さらに、多面体の辺は、2つの面の間に1辺が存在するから、

$$e = \frac{5f_5 + 6f_6 + 7f_7}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

数学的ビーズ編みは、3つのビーズで「Y字構造」を編んだ。

$$v = \frac{5f_5 + 6f_6 + 7f_7}{3} \quad \dots \textcircled{4}$$

① 式に、②、③、④式を代入し、6倍すると、

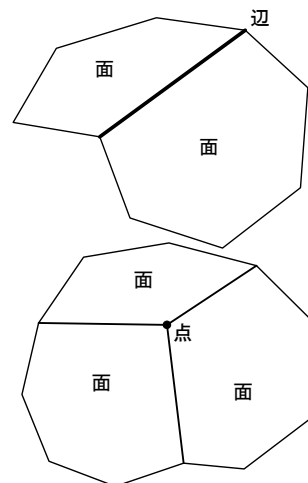
$$2(5f_5 + 6f_6 + 7f_7) - 3(5f_5 + 6f_6 + 7f_7) + 6(f_5 + f_6 + f_7) = 12 - 12k$$

すると、

$$10f_5 + 12f_6 + 14f_7 - (15f_5 + 18f_6 + 21f_7) + 6f_5 + 6f_6 + 6f_7 = 12 - 12k$$

$$f_5 - f_7 = 12 - 12k \quad \dots \textcircled{5}$$

を得る。

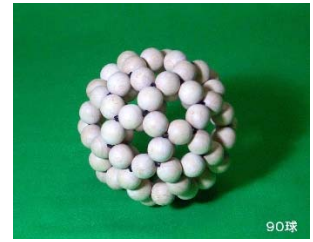


[3] いろいろな多面体を調べてみよう。

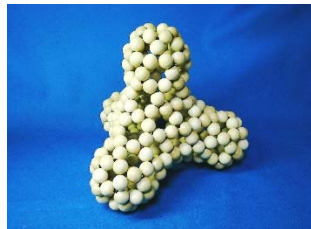
- (1) 穴の無い多面体・ビーズ編み
サッカーボール状の多面体を考えて見よう
5 角形と 6 角形から出来ている。
7 角形は無い。穴も空いていない。
つまり、 $f_7=0$, $k=0$ であるから、

$$f_5=12$$

となる。つまり、サッカーボールの 5 角形は黒い部分なので、それは 12 個と分かる。
この多面体は 6 角形は 20 個である。
右の様な 6 角形がもっと多く 30 個あるビーズ編みも、同じく $f_7=0$, $k=0$ であるから、 $f_5=12$ である。



江戸期の数学で扱った 30 球で出来たビーズ編みは、5 角形 12 個だけで 6 角形も無い。



さらに、穴は無いが 7 角形があるビーズ編みについて $k=0$ という条件から⑤より、
 $f_5 - f_7 = 12$

つまり、5 角形は 7 角形より必ず 12 個多い事が分かる。これは、左のテトラポッドの
ようなビーズ編みでも、金平糖のような物でも同じである。

- (2) 穴の空いた多面体状のビーズ編み



この 3 種のビーズ編みは穴が 1 つなので $k=1$ であるから、⑤より $f_5 = f_7$ となる。
つまり、必ず 5 角形と 7 角形の個数は等しい。

[参考文献] 堀部和経・林一雄・早苗雅史著「数学の課題研究テーマ選びのヒント」

デザインエッグ株式会社 (2019) p.130～p.135