平均の存在しない確率分布　高校生に向けて

確率分布の平均 $E(X)=m$ が存在しない（意味を持たない）例を２つ紹介する。

【例１・離散型】

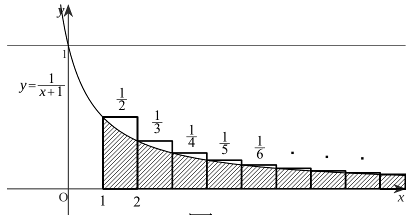

図１

$$P(X=x)=P(x)=\frac{1}{x(x+1)} \quad (x=1,2,3,\cdots)$$

とすると，

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{x=1}^{n}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

となり，X は確率変数となっている。しかし，

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\,p(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x}{x(x+1)}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x+1}>\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1}=\Big[\log(x+1)\Big]_1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left\{\log(n+1)-\log 2\right\}=\infty$$

であるから，平均値は発散し意味を持たない。

【例２・連続型】

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \quad (-\infty<x<\infty)$$

（※コーシー分布と呼ばれている）

とすると，$f(-x)=f(x)$ であるから $x=0$ に関して対称であるのに，平均値を持たない。

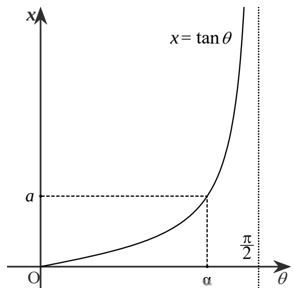

図２

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{2}{\pi}\lim_{a\to\infty}\int_0^{a}\frac{dx}{1+x^2}$$

となり，ここで $x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta$，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

となる。$a=\tan\alpha \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ つまり $\alpha=\mathrm{Arctan}\,a$ とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha}d\theta=\frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\left[\theta\right]_0^{\alpha}=\frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\alpha=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$$

となり，$f(x)$ は確率密度関数である。ところで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2\pi}\Big[\log\left(1+x^2\right)\Big]_{-\infty}^{\infty}=\infty-\infty$$

これは不定形であり，この積分は意味を持たない。

［参考文献］竹内　啓著「数理統計学」東洋経済新報社　昭和３８年（1963）

堀部和経　2023/07/09