4次元幾何学入門の入門（１）

＊＊＊4 次元の正多胞体の紹介　高校生に向けて＊＊＊

§0 準備　3 次元空間内の正 4 面体の紹介

空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,1,1), \mathrm{B}(-1,-1,1), \mathrm{C}(1,-1,-1), \mathrm{D}(-1,1,-1)$

を考える。6 つの線分の長さを調べる。まず，

$$\mathrm{AB}^2=(-1-1)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2=4+4+0=8$$

となる。また，

$$\mathrm{AC}^2=0+4+4=8,\qquad \mathrm{AD}^2=4+0+4=8$$
$$\mathrm{BC}^2=4+0+4=8,\qquad \mathrm{BD}^2=4+0+4=8$$
$$\mathrm{CD}^2=4+4+0=8$$

であるから，6 つの線分の長さはすべて等しく，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2\sqrt{2}$$

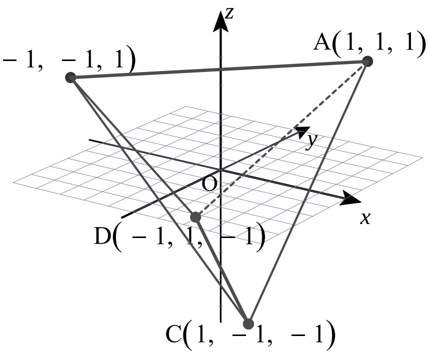

図 1

となっている。したがって，

$$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{ABD}\equiv\triangle\mathrm{ACD}\equiv\triangle\mathrm{BCD}$$ ：1 辺 $2\sqrt{2}$ の正 3 角形

であるので，4 面体 ABCD は正 4 面体である。（以降，4 面体の記号をとする。）
このように座標を決め，計算をすることで，その立体の構造を調べてみよう。

§1 座標　4 次元空間の座標について

点 P は $P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ と表すことにし，以降，点とベクトルを同一視する。

原点 O と点 P との距離として，P の絶対値を考え次で定義する。

$$|P|=\sqrt{{p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2}$$

さらに 2 点（つまり 2 つのベクトル）$P=(p\ ,p_2,p_3,p_4),\ Q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$ に対して

$\angle\,\mathrm{POQ}=\theta$ は $P\bullet Q=|P|\cdot|Q|\cos\theta$ で定義する。

§2　正多胞体の紹介

3 次元空間では次のような 5 種類の正多面体があった。

正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体

正多面体に対応するのは,4 次元空間では次の 6 種類の正多胞体である。（正 n 胞体）

正 5 胞体、正 8 胞体，正 16 胞体，正 24 胞体，正 120 胞体，正 600 胞体

§3　正 5 胞体について

4 次元空間内の次の 4 点を考える。

$$\mathrm{A}(1,1,1,0), \mathrm{B}(-1,-1,1,0), \mathrm{C}(1,-1,-1,0), \mathrm{D}(-1,1,-1,0)$$

について，（§0 の計算を参考）

$$AB = AC = AD = BC = BD = CD = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC \equiv \triangle ABD \equiv \triangle ACD \equiv \triangle BCD$$ ：1 辺 $2\sqrt{2}$ の正三角形

したがって，ABCD は正四面体である。

ここで，第 5 の点 $E\left(0,0,0,\sqrt{5}\right)$ を考える。すると，

$$AE^2 = (0-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2 + \left(\sqrt{5}-0\right)^2 = 1+1+1+5 = 8$$

であり $BE^2 = CE^2 = DE^2 = 8$ となるので， $AE = BE = CE = DE = 2\sqrt{2}$ である。したがって，

$$\triangle ABE \equiv \triangle ACE \equiv \triangle ADE \equiv \triangle BCE \equiv \triangle BDE \equiv \triangle CDE$$ ：1 辺 $2\sqrt{2}$ の正三角形

したがって，

ABCE ≡ ABDE ≡ ACDE ≡ BCDE ：正 4 面体

以上のことをまとめると，

4 次元空間内の 5 点 A,B,C,D,E からできている立体は，

- 正 4 面体 5 個で構成されている。（${}_5C_4 = 5$）
- 正 3 角形 10 個で構成されている。（${}_5C_3 = 10$）
- 辺は 10 本で構成されている。（${}_5C_2 = 10$）
- 頂点は 5 点で構成されている。（${}_5C_1 = 5$）（←説明不用）

このように考察していた点を平行移動し,座標を変換してみよう。

5 点 A,B,C,D,E をそれぞれ $\left(0,0,0,0,-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ だけ平行移動した点を P,Q,R,S,T とする。

$$P\left(1,1,1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), Q\left(-1,-1,1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), R\left(1,-1,-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), S\left(-1,1,-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), T\left(0,0,0,\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

となる。そして，

$$OP^2 = OQ^2 = OR^2 = OR^2 = 1+1+1+\frac{1}{5} = \frac{16}{5},\quad OT^2 = 0+0+0+\frac{16}{5} = \frac{16}{5}$$

つまり，5 点 P,Q,R,S,T は原点 $O(0,0,0,0)$ 中心，半径 $r = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ の超球面上にある

※　4 次元の球面なので超球面と呼ばれている。2 次元の球は「円」ですね。

［参考文献］　平澤美可三「4 次元正多面体入門　正多胞体の内訳と構成」
数学セミナー2021 年 9 月号（第 60 巻 9 号通算 719 号）p.8～p.15

2023-08-29　堀部和経