チェビシェフの不等式（2通りの証明）と大数の法則　（高校生に向けて）

［記号］一般的な記号は既知とするが、確認のために次を記す。

事象 A の起こる確率 $P(A)$,　確率変数 X

平均（期待値）$m=E(X)$,　分散 $\sigma^2=V(X)$,　標準偏差 $\sigma=\sqrt{V(X)}$

［前提］平均や分散は有限な値で存在している事を前提とする。

［準備１］確率分布が右の場合

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$P(x_i)=p_i \quad (i=1,2,\cdots,n),\quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1,\quad m=E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$V(X)=E\left((X-m)^2\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-m)^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

［準備２］確率変数 X,Y に対し（但し，a,b は定数とする）

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y),\quad E(aX+b)=aE(X)+b,\quad V(aX+b)=a^2V(X)$$

さらに，確率変数 X,Y が独立な場合

$$E(XY)=E(X)E(Y),\qquad V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

［準備３］すべての x に対して $f(x)\geq g(x)$ ならば $E\left(f(X)\right)\geq E\left(g(X)\right)$ である。

特に，等号が成り立つ条件は，$P\left(f(X)=g(X)\right)=1$ である。

［定理１］ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ を，すべて同じ分布に従っている互いに独立な確率変数，つまり

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=m\ (<\infty),\quad V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2\ (<\infty)$$

とする。

そして，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\overline{X}_{(n)}$ とおく。ここで $\overline{X}$ をわざわざ，$\overline{X}_{(n)}$ と表記したのは，n 個の確率変数の平均であることを明示するためである。

このとき，$E\left(\overline{X}_{(n)}\right)=m$，$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$ となる。

［証明］

$$E\left(\overline{X}_{(n)}\right)=E\left(\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n}E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\{E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\}=\frac{1}{n}(m+m+\cdots+m)=\frac{nm}{n}=m$$

$$V\left(\overline{X}_{(n)}\right)=V\left(\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n^2}V(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

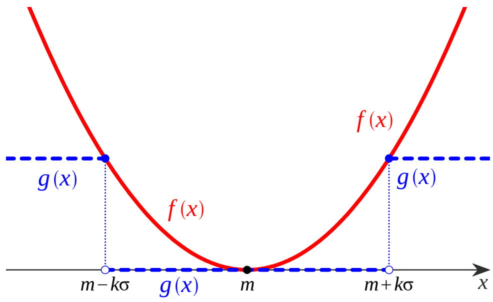
$$=\frac{1}{n^2}\{V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)\}=\frac{1}{n^2}(\sigma^2+\sigma^2+\cdots+\sigma^2)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$ ■

［定理２］ チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

確率変数 X の平均 m，標準偏差 σ に対して，任意の $k(>0)$ に対して，

$$P(\ |X-m|\geq k\sigma\ )\leq\frac{1}{k^2}$$

が成り立つ。



［証明］

$$f(x)=\frac{1}{k^2}(x-m)^2,\quad g(x)=\begin{cases}\sigma^2 & (|x-m|\geq k\sigma)\\ 0 & (|x-m|<k\sigma)\end{cases}$$

とする。すべての x に対して $f(x)\geq g(x)$ であるので，次の不等式を得る。

$$E(f(X))\geq E(g(X))\cdots\cdots(※)$$

（※）の左辺 ： $E(f(X))=E\left(\frac{1}{k^2}(X-m)^2\right)=\frac{1}{k^2}E\left((X-m)^2\right)=\frac{1}{k^2}V(X)=\frac{\sigma^2}{k^2}$

また， $P(|X-m|\geq k\sigma)=p$ とおけば $P(|X-m|<k\sigma)=1-p$。 $g(X)$ の分布は次となるので，

$g(X)$	σ^2	0	計
P	$p=P(\|X-m\|\geq k\sigma)$	$1-p=P(\|X-m\|<k\sigma)$	1

（※）の右辺 ： $E(g(X))=p\cdot\sigma^2+(1-p)\cdot 0=p\sigma^2=\sigma^2P(|X-m|\geq k\sigma)$

となり，両辺を σ^2 で割れば，次を得る。

$$P(|X-m|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}$$ ■

［定理３］大数の法則 Low of Large Numbers

任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，$n \to \infty$ のとき $P\left(\left|\overline{X} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$

［証明］

任意の ε に対し $k = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ とおく。この k に対してチェビシェフの不等式は成り立つ。

さて，上記と同様に $\dfrac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) = \overline{X} = \overline{X}_{(n)}$ とすると，

$$V\left(\overline{X}_{(n)}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

であるので $\langle\alpha\rangle$ の左辺と右辺は，

$$\langle\alpha\rangle \text{の左辺：} E\left(f\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right) = \frac{1}{k^2} V\left(\overline{X}_{(n)}\right) = \frac{\sigma^2}{nk^2}$$

$$\langle\alpha\rangle \text{の右辺：} E\left(g\left(\overline{X}_{(n)}\right)\right) = \sigma^2 P\left(\left|\overline{X}_{(n)} - m\right| \geq k\sigma\right)$$

であるから，

$$\frac{\sigma^2}{nk^2} \geq \sigma^2 P\left(\left|\overline{X}_{(n)} - m\right| \geq k\sigma\right)$$

両辺を σ^2 で割り，左右を入れ替え，

$$P\left(\left|\overline{X}_{(n)} - m\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{nk^2}$$

を得る。ところで $k\sigma = \varepsilon$，$\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ であるので，この不等式に代入すると，

$$P\left(\left|\overline{X}_{(n)} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n}$$

いま $n \to \infty$ とすると $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$ となるので，

任意の $\varepsilon(>0)$ に対して，$n \to \infty$ のとき $P\left(\left|\overline{X} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$ となる。 ■

ここまでで,チェビシェフの不等式と大数の法則を示した。

以下,別の手法でチェビシェフの不等式を示す。

[準備4] 連続型確率分布関数 $p(x)$に対する確率について,

$a \le X \le b$である確率は, $P(a \le X \le b)=\int_a^b p(x)dx$である。

[定理4] マルコフの不等式 Markov's inequality

非負の確率変数 X と任意の正の数 α に対して, 次の不等式が成立する。

$$P(X \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha}E(X)$$

[証明] 連続でも離散でも同様であるが, ここでは連続の場合で示す

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)dx=\int_0^{\infty} x\,p(x)dx=\int_0^{\alpha} x\,p(x)dx+\int_{\alpha}^{\infty} x\,p(x)dx$$

$$\ge \int_{\alpha}^{\infty} x\,p(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\infty} \alpha\,p(x)dx=\alpha\int_{\alpha}^{\infty} p(x)dx=\alpha P(X \ge \alpha) \qquad \blacksquare$$

[補足] if $x \ge \alpha(>0) \Rightarrow xp(x) \ge \alpha\,p(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\infty} x\,p(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\infty} \alpha\,p(x)dx$

[定理5] チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality

確率変数 X の平均 m, 標準偏差 σと, 任意の $k(>0)$に対して, 次が成り立つ。

$$P(\,|X-m| \ge k\sigma\,) \le \frac{1}{k^2}$$

[証明]

確率変数 $Y=|x-m|^2$ は非負の確率変数である。また $(k\sigma)^2=\alpha$ とおく。

マルコフの不等式により $P(Y \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha}E(Y)$である。

$$P(|X-m| \ge k\sigma)=P\left(|X-m|^2 \ge (k\sigma)^2\right)=P(Y \ge \alpha) \le \frac{1}{\alpha}E(Y)$$

$$=\frac{1}{(k\sigma)^2}E\left(|X-m|^2\right)=\frac{1}{k^2\sigma^2}V(X)=\frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}=\frac{1}{k^2} \qquad \blacksquare$$

[参考文献] 竹内　啓 著「数理統計学」東洋経済新報社（1963）
東京大学教養部統計教室 編「統計学入門」東京大学出版部（1991）

堀部和経　2022/07/20