チェビシェフの不等式 と 大数の法則　**（高校生に向けて）**

 確率分布の平均（期待値），分散などの基本性質から，チェビシェフの不等式、大数の法則までを高校生に向けて、ていねいに説明・証明をした。具体的には，計算過程を急がず，一段一段確認しながら進める。

［記号］一般的な記号は既知とするが、確認のために次を記す。

　 事象の起こる確率，　確率変数

 平均（期待値）,　　分散，　　標準偏差

［準備１］確率分布が右の表の場合

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 計 |
|  |  |  |  |  |  |

 

 ，　

 …①　，

［証明①］

　　　

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 計 |
|  |  |  |  |

 　　　　　　　　　　■

　特に確率分布が右の表の場合

　　　

 この簡単な等式は，後に重要な箇所で参照することになる。

［準備２］を定数とするとき，

　（１）確率変数に対して，平均の線形性より

 ，

　となる。さらに　…②

　（２）互いに独立な確率変数に対して

 …③

 …④

［証明②，③，④］

 

 　　　　

 　

  とする。

 

 

 

 　

 　　　　 　　■

［準備３］確率変数とその平均の定義から明らか。説明の必要は無いだろう。

　すべてのに対してならば  である。

　特に，等号が成り立つ条件は，である。

［定理１］

　互いに独立な確率変数で，すべて同じ分布に従っているとする。つまり，

 

 

である。そして，

 

とする。を個の確率変数の平均であることを明示するためともかく。

　このとき，…⑤，…⑥　である。

［証明⑤，⑥］

　 

 

 

 　■

［定理２］チェビシェフの不等式

　確率変数の平均,標準偏差に対して，任意のに対して，

 …⑦

が成り立つ。

［証明⑦］

 ，

とする。すべてのに対してであり，準備３により次の不等式が得られる。

 ･･･⑧

　ところで⑧の左辺は次のようになる。

 ･･･⑨

また，とおけばであるので，の定義よりその分布は次の様になっている。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 計 |
|  |  |  |  |

　この確率分布の平均を求めると，⑧の右辺は次のようである。

 ･･･⑩

　⑧に⑨と⑩を代入し，

 　　よって　　　　　　　■

［定理３］大数の法則

　任意のに対して，のとき…⑪

［証明⑪］

　任意のに対しとおく。このに対してチェビシェフの不等式⑦は成り立つ。

さて，上記と同様にとすると，

 

であるので⑨と⑩は，





であるから，



両辺をで割り，

 …⑫

を得る。ところで，であるので⑫に代入すると，



とするととなるので，

のとき　　　　　　　　　　　　■

**※（注意）全体を通して，平均や分散が有限な値で存在している事を前提としている。**

|  |
| --- |
| ［参考文献］竹内　啓著「数理統計学」東洋経済新報社　昭和３８年（1963） |

堀部和経　2022/06/10