チェビシェフの不等式（２通りの証明）と大数の法則　**（高校生に向けて）**

［記号］一般的な記号は既知とするが、確認のために次を記す。

　 事象の起こる確率，　確率変数

 平均（期待値）,　　分散，　　標準偏差

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 計 |
|  |  |  |  |  |  |

［前提］平均や分散は有限な値で存在している事を前提とする。

［準備１］確率分布が右の場合

 ，，

 

［準備２］確率変数に対し（但し，は定数とする）

，，

　さらに，確率変数が独立な場合

 ，　

［準備３］すべてのに対してならば  である。

　特に，等号が成り立つ条件は，である。

［定理１］を，すべて同じ分布に従っている互いに独立な確率変数，つまり

 ，

とする。

そして，とおく。ここでをわざわざ，と表記したのは，個の確率変数の平均であることを明示するためである。

　このとき，，となる。

［証明］

　 

 

 

 　■

［定理２］チェビシェフの不等式Chebyshev's inequality

　確率変数の平均,標準偏差に対して，任意のに対して，

 

が成り立つ。

［証明］

 ，

とする。すべてのに対してであるので，次の不等式を得る。

 ･･････(※)

　 (※)の左辺：

また，とおけば。の分布は次となるので，

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 計 |
|  |  |  |  |

 (※)の右辺：

　となり，両辺をで割れば，次を得る。

 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　■

［定理３］大数の法則 Low of Large Numbers

　任意のに対して，のとき

［証明］

　任意のに対しとおく。このに対してチェビシェフの不等式は成り立つ。

さて，上記と同様にとすると，

 

であるのでの左辺と右辺は，

の左辺：

の右辺：

であるから，



両辺をで割り，左右を入れ替え，

 

を得る。ところで，であるので，この不等式に代入すると，



　いまとするととなるので，

　任意のに対して，のときとなる。　　　　　　■

　ここまでで,チェビシェフの不等式と大数の法則を示した。

　以下,別の手法でチェビシェフの不等式を示す。

［準備４］連続型確率分布関数に対する確率について,

である確率は,である。

［定理４］マルコフの不等式　Markov’s inequality

 非負の確率変数と任意の正の数に対して,次の不等式が成立する。



［証明］連続でも離散でも同様であるが，ここでは連続の場合で示す



 　■

［補足］if

**［定理５］チェビシェフの不等式**Chebyshev's inequality

　確率変数の平均,標準偏差と,任意のに対して，次が成り立つ。

 

［証明］

　確率変数は非負の確率変数である。またとおく。

　マルコフの不等式によりである。



　　　　　■

|  |
| --- |
| ［参考文献］　竹内　啓 著「数理統計学」東洋経済新報社（1963）　　　　　　　東京大学教養部統計教室 編「統計学入門」東京大学出版部（1991） |

堀部和経　2022/07/20