

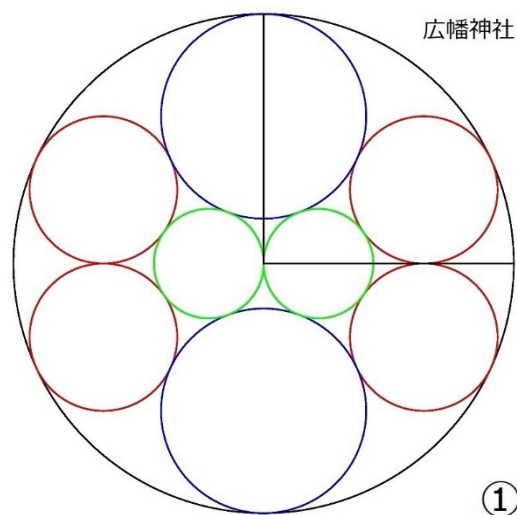
広幡神社の算額の問題

外の円の半径を1とし、中の大円、中円、小円の半径 a, b, c を求めよ。

広幡神社の問題は、図①だけである。

図2から図7はその問題の類似問題である。

円はお互いに接しているものとする。



【問題1】から【問題7】に答えよ。

【問題1】

図①の場合について、 a, b, c の値を求めよ。

【①の解答】

図①ではなく、右下のヒント図の条件のみで計算を進める。

また、これらの計算は図①から図⑦まですべての場合に対応していることに注意。

さて、2つの $\triangle OBH$ と $\triangle BAI$ において

$$OH^2 = BI^2$$

$$(1-b)^2 - b^2 = (a+b)^2 - (1-a-b)^2$$

$$a + 2b = 1 \quad \dots \quad ①$$

次に、線分 $OC = x$ とおき $\triangle CAO$ を考える。

$$x^2 + (1-a)^2 = (a+c)^2$$

$$x^2 = (c+1)(c+2a-1) \quad \text{に①を代入して、}$$

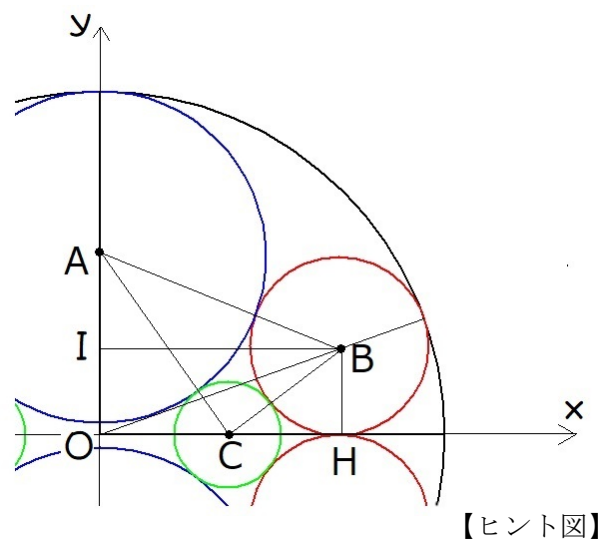
$$x^2 = (c+1)(c+1-4b) \quad \dots \quad ②$$

ところで、 $OH^2 = 1 - 2b = a$ であるから、 $OH = \sqrt{a}$

$\triangle BCH$ で、 $(b+c)^2 = b^2 + (\sqrt{a} - x)^2$ であるので

$$2bc + c^2 = a + x^2 - 2x\sqrt{a} \quad \text{となり、②を代入して、}$$

$$2bc + c^2 = a + (c+1)(c+1-4b) - 2x\sqrt{a}$$



$$x\sqrt{a}=1+c-3b-3bc \quad \text{よって,} \quad x\sqrt{a}=(c+1)(1-3b) \quad \cdots \quad \textcircled{3} \quad \text{を得る。}$$

そして③の両辺を2乗し、 $x^2a=(c+1)^2(1-3b)^2$ に再度、②を代入する。

$$(c+1)(c+1-4b)a=(c+1)^2(1-3b)^2$$

$$(c+1)^2\{a-(1-3b)^2\}=4ab(c+1)$$

$$(c+1)^2\{(1-2b)-(1-3b)^2\}=4ab(c+1)$$

$$(c+1)^2(9-4b)b=4ab(c+1)$$

$c+1 \neq 0, b \neq 0$ であり、 $4-9b=0$ とすると、 $ab(c+1)=0$ となるので矛盾。

従って、

$$c=\frac{4a}{4-9b}-1=\frac{4(1-2b)-(4-9b)}{4-9b}=\frac{b}{4-9b}$$

また、③より

$$x=\frac{(c+1)(1-3b)}{\sqrt{a}}=\frac{4a(1-3b)}{(4-9b)\sqrt{a}}=\frac{4(1-3b)\sqrt{a}}{4-9b}=\frac{4(1-3b)\sqrt{1-2b}}{4-9b}$$

以上で、 a, c および x を b で表すことができた。

$$a=1-2b, c=\frac{b}{4-9b}, x=\frac{4(1-3b)\sqrt{1-2b}}{4-9b}$$

これ以降は、図①の場合の条件の下で計算を進める。

$$OC=x=c \text{ であるから, } \frac{4(1-3b)\sqrt{1-2b}}{4-9b}=\frac{b}{4-9b}$$

分母を払い $4(1-3b)\sqrt{1-2b}=b$ を得る。両辺2乗し整理し因数分解する。

$$288b^3-335b^2+128b-16=0 \quad \therefore \quad (9-4b)(32b^2-23b+4)=0$$

$$9-4b \neq 0 \text{ なので, } b=\frac{23 \pm \sqrt{17}}{64} \quad \text{そして, } 0 < b < 1 \text{ であるから, } b=\frac{23-\sqrt{17}}{64}$$

よって、

$$a=1-2b=\frac{9+\sqrt{17}}{32}, c=\frac{b}{4-9b}=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

【問題 2】

図②の場合について、 a, b, c の値を求めよ。

図②の中央部の四角形は正方形であり円に接している。

〔②の解答〕

中央の正方形の辺の半分で等式を立てる。

$$1 - 2a = x - c$$

$$1 - 2(1 - 2b) = \frac{4(1 - 3b)\sqrt{1 - 2b}}{4 - 9b} - \frac{b}{4 - 9b}$$

$$(4b - 1)(4 - 9b) = 4(1 - 3b)\sqrt{1 - 2b} - b$$

$$(4b - 1)(4 - 9b) + b = 4(1 - 3b)\sqrt{1 - 2b}$$

両辺を平方したのち整理し因数分解する。

$$324b^4 - 396b^3 + 157b^2 - 20b = 0$$

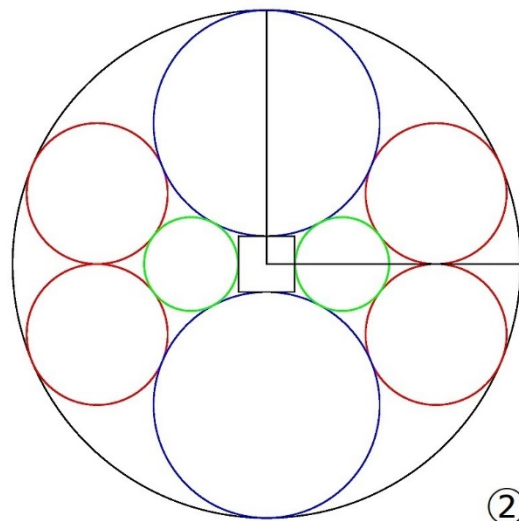
$$b(2b - 1)(9b - 4)(18b - 5) = 0$$

$b \neq 0, 9b - 4 \neq 0$ であり、図より $b < a < \frac{1}{2}$ であるから、

$$b = \frac{5}{18}$$

を得る。よって、

$$a = 1 - 2b = \frac{4}{9}, c = \frac{b}{4 - 9b} = \frac{5}{27}$$



【問題 3】

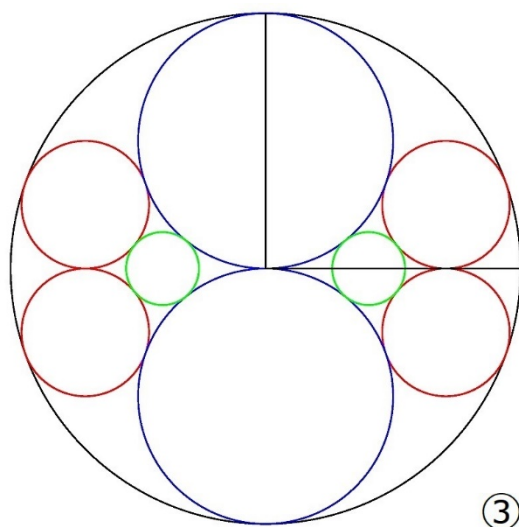
図③の場合について、 a, b, c の値を求めよ。

〔③の解答〕

外の円の半径が、円 A の直径であるから、

$$2a = 1 \quad \text{となり、} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{であるから、}$$

$$b = \frac{1 - a}{2} = \frac{1}{4}, c = \frac{b}{4 - 9b} = \frac{1}{7}$$



【問題 4】

図④の場合について、 a, b, c の値を求めよ。

〔④の解答〕

外の円の半径で等式を立てる。

$$2a - c = 1$$

$$2(1 - 2b) - \frac{b}{4 - 9b} = 1$$

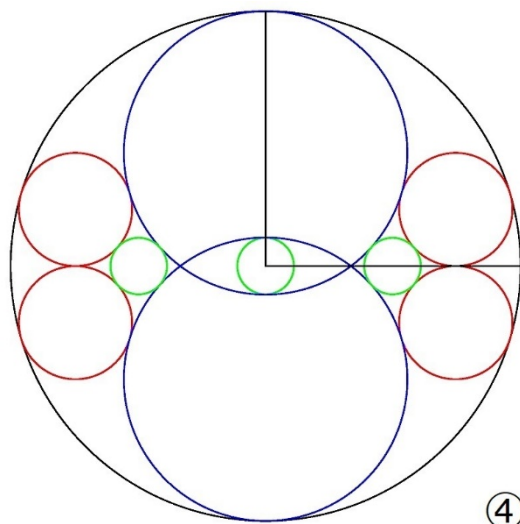
分母を払って、整理する。

$$18b^2 - 13b + 2 = 0$$

$$(2b - 1)(9b - 2) = 0$$

図②の場合と同様に、 $b < a < \frac{1}{2}$ なので、 $b = \frac{2}{9}$

$$a = 1 - 2b = \frac{5}{9}, c = \frac{b}{4 - 9b} = \frac{1}{9}$$



【問題 5】

図⑤の場合について、 a, b, c の値を求めよ。

〔⑤解答〕

円 A および円 C の中心を結ぶ線分の長さから、(拡大図参照)

$$\sqrt{(a - c)^2 - c^2} = 1 - a$$

両辺 2 乗し、整理する。

$$-2ac = 1 - 2a \quad \therefore \quad 2a(1 - c) = 1$$

$$2(1 - 2b) \left(1 - \frac{b}{4 - 9b} \right) = 1$$

分母を払って、整理して、

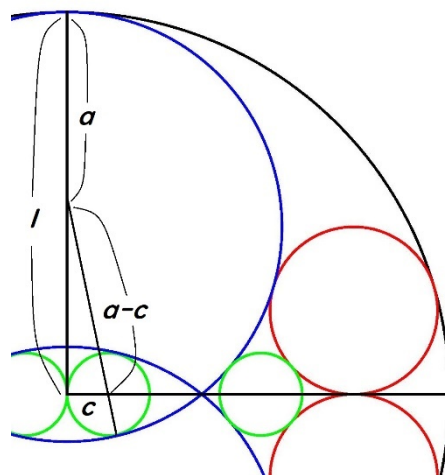
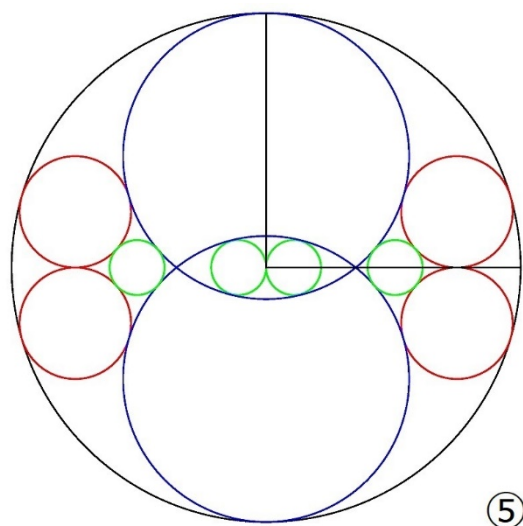
$$40b^2 - 27b + 4 = 0 \quad \therefore \quad b = \frac{27 \pm \sqrt{89}}{80}$$

図④の b の値と比較し、

$$b = \frac{27 - \sqrt{89}}{80}$$

よって、

$$a = 1 - 2b = \frac{13 + \sqrt{89}}{40}, c = \frac{b}{4 - 9b} = \frac{\sqrt{89} - 9}{4}$$



【問題 6】

図⑥の場合について、 a, b, c の値を求めよ。

〔⑥の解答〕

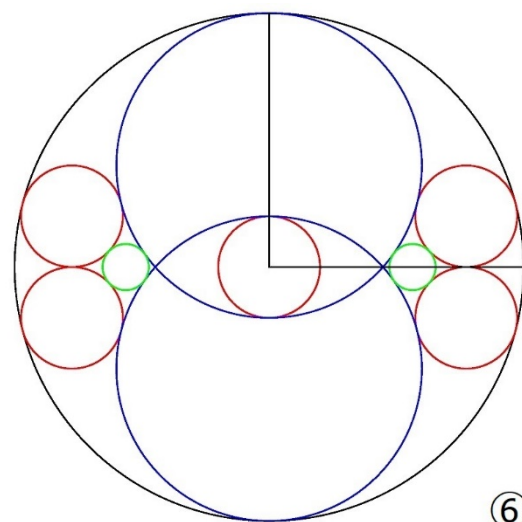
円 A と円 C の半径を考えて、

$$2a - b = 1 \quad \therefore \quad 2(1 - 2b) - b = 1$$

であるから、
$$b = \frac{1}{5}$$

よって、

$$a = 1 - 2b = \frac{3}{5}, c = \frac{b}{4 - 9b} = \frac{1}{11}$$



⑥

【問題 7】

図⑦場合について、 a, b, c の値を求めよ。

〔⑦解答〕

円 A および円 B の中心を結ぶ線分の長さから、(拡大図参照)

$$\sqrt{(a-b)^2 - b^2} = 1 - a$$

両辺 2 乗し、 a を消去する。

$$2(1 - 2b)(1 - b) = 1$$

整理して、

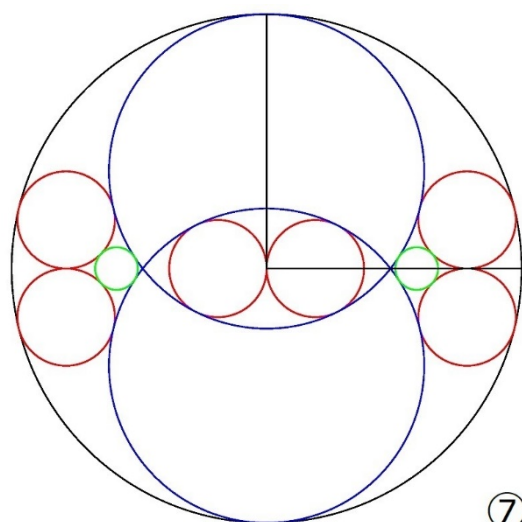
$$4b^2 - 6b + 1 = 0 \quad \text{より、} \quad b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$b < a < \frac{1}{2}$ であるので、

$$b = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

よって、

$$a = 1 - 2b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, c = \frac{b}{4 - 9b} = \frac{4\sqrt{5} - 3}{71}$$



⑦

