# 階差数列の公式について

## 1　階差数列の和

［定理１］数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。このとき$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \ (n \geq 2)$である。

この定理を用いて一般項$a_n$を求めた場合，具体的に$n=1$に対して確認をしなければならない。
求めた$n \geq 2$の一般項が初項に対して成立しない場合があるのだろうか。
・・・と疑問を持っている方がいる。

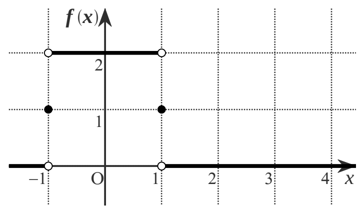
確認が必要な例を示す。以下，断り無く，$b_n = a_{n+1} - a_n$とする。

［例１］$a_1 = 1,\ b_n = f(n)$とする。ただし$f(n)$は，関数$f(x) = \lim_{N \to \infty} \dfrac{2}{x^{2N}+1}$に自然数$n$を代入して与えられるものとする。

［解１］

(1) $|x| < 1$のとき，$f(x) = \lim_{N \to \infty} \dfrac{2}{x^{2N}+1} = 2$　　(2) $|x| = 1$のとき，$f(x) = \lim_{N \to \infty} \dfrac{2}{x^{2N}+1} = 1$

(3) $|x| > 1$とき，$f(x) = \lim_{N \to \infty} \dfrac{2}{x^{2N}+1} = \lim_{N \to \infty} \dfrac{2\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2N}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2N}} = \dfrac{2 \cdot 0}{1+0} = 0$




となるから，$b_1 = 1, b_n = 0\ (n \geq 2)$　つまり，$\{b_n\} = \{\ 1, 0, 0, 0, 0, \cdots\ \}$となっている。

したがって，定理１を用いて

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + (1+0+0+\cdots+0) = 2 \ \ (n \geq 2)$$

$$a_1 = 1$$

を得る。

［解説］

階差数列を$\{b_n\} = \{\ 1, 0, 0, 0, 0, \cdots\ \}$・・・①という（普通でない？）形にすれば，初項は求めた等式に当てはまらない。ここでは，$b_n = \lim_{N \to \infty} \dfrac{2}{n^{2N}+1}$と表現したが、①としてもよい。

## 2 階差数列の和の公式、Ver 2

定理１を利用すると，$n=1$ と $n\geq 2$ との間の接続について確認しなくてはいけない。
では，一般的に $n\geq 1$ で成り立つ公式はないのだろうか・・・。

［定理２］数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。このとき次が成り立つ。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_n \quad (n\geq 1)$$

［証明］・・・（解説？，でもよい）
$n\geq 1$ に対して，

$$a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k = \{ a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \} = a_{n+1} = a_n + b_n$$

となり，定理の成立は明らか。また，数列 $\{a_n\}$ とその階差数列 $\{b_n\}$ を図示すると，

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & \cdots & a_n & & a_{n+1} \\ & \backslash / & & \backslash / & & \backslash / \quad & & \backslash / & \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 \cdots b_{n-1} & & b_n & \end{array}$$

となり，直ちに理解できるであろう。 終

以下，よくある階差数列の問題を考える。

［問１］ $a_1 = 1,\ b_n = 2n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

［解答１］ $n\geq 1$ に対して，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2k - 2n = 1 + 2\times\frac{1}{2}n(n+1) - 2n = n^2 - n + 1$$ 答

では，前ページの例１を考える。
［例１］ $n\geq 1$ に対して，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_n = 1 + 1 - b_n = 2 - \lim_{N\to\infty}\frac{2}{n^{2N}+1} = \begin{cases} 2-1 & (n=1) \\ 2-0 & (n\geq 2) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2 & (n\geq 2) \end{cases}$$ 答

その他の階差数列の様々な問題で確認してみては・・・。

作 2012/10/12　　改作 2022/12/16　　堀部和経