

【解答編】

(1) この 19 個の点の中から、異なる 2 点を結ぶ線分を考える。このとき線分の長さは何通りあるか。

[解]

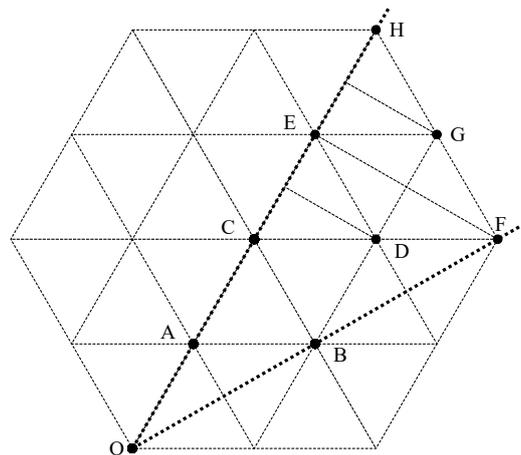
正三角形格子状に配置された点なので、その対称性から点 O を基準点に設定したとき、2 つの半直線 OH と OF の間の点 A から H とを結ぶ線分を考えればよい。

$$OA=1, OB=\sqrt{3}, OC=2, OD=\sqrt{7},$$

$$OE=3, OF=2\sqrt{3}, OG=\sqrt{13}, OH=4$$

である。

これらの長さはすべて異なるので、長さは 8 通りある。

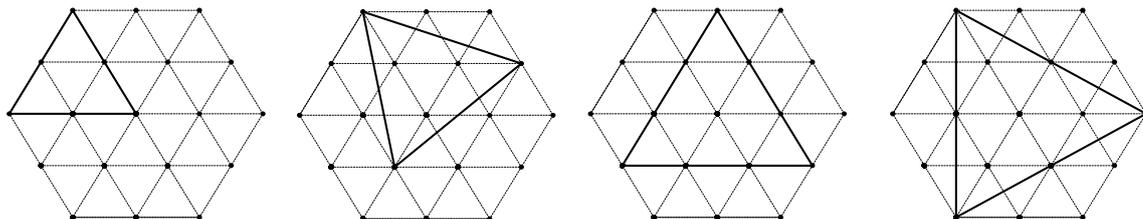
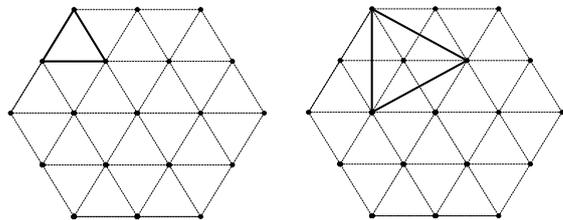


(2) この 19 個の点の中の 3 点を選び正三角形を作る。大きさの異なる正三角形は何種類あるか。

[解]

(1) の解より正三角形の 1 辺の長さを u とすると、

$u=1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{7}, 3, 2\sqrt{3}$ の 6 通りとなる。



(3) この 19 個の点の中の 3 点を選び正三角形を作る。このとき全部で何個できるか。

(大きさ、位置が異なる正三角形は区別する。)

[解]

正三角形の辺の長さで分類し、個数 k を数える。

・ $u=1$ の場合

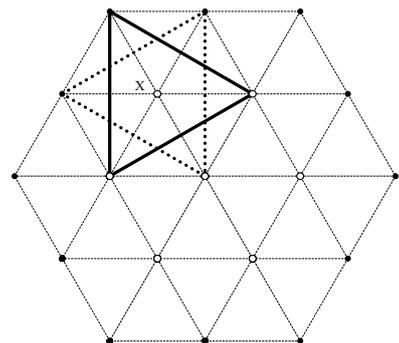
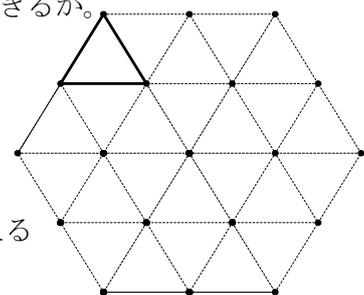
正三角形の配置は上下対称となっている。上半分を 1 段目、2 段目と分けて考えると、正三角形は 1 段目 5 個、2 段目 7 個であるから、

$$k=2 \times (5+7) = 24 \text{ 個}$$

・ $u=\sqrt{3}$ の場合

2 つの正三角形 ($u=\sqrt{3}$, 実線と破線) の中心 X となりうる点は、7 個の点(白丸)なのであるから、

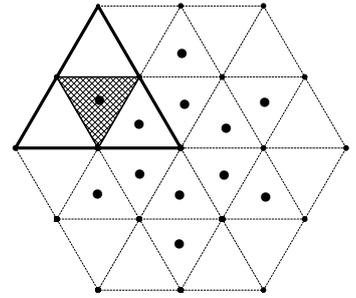
$$k=2 \times 7 = 14 \text{ 個}$$



・ $u=2$ の場合

正三角形($u=2$)とその中の小正三角形($u=1$, 網目)は, $1:1$ に対応している。小三角形($u=1$)となりうるものは「黒丸」を付けた外側 6 個と内側 6 個であるから,

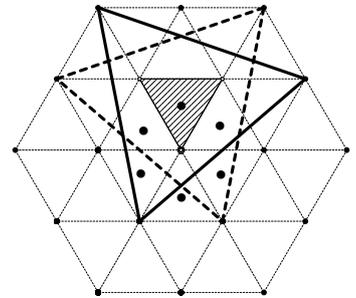
$$k = 2 \times 6 = 12 \text{ 個}$$



・ $u=\sqrt{7}$ の場合

2 つの正三角形($u=\sqrt{7}$, 実線と破線)の中央にある小三角形($u=1$, 斜線)となりうるものは「黒丸」を付けた 6 個であるから,

$$k = 2 \times 6 = 12 \text{ 個}$$



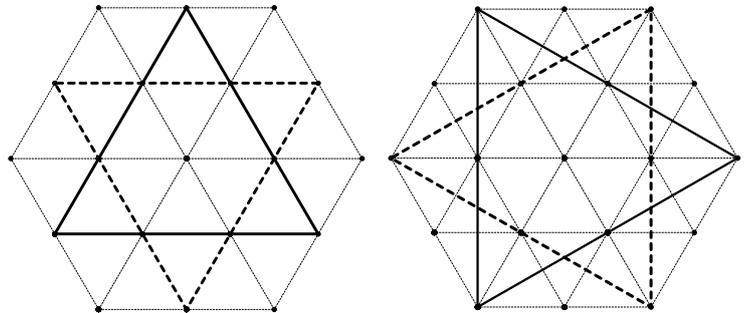
・ $u=3, 2\sqrt{3}$ の 2 つの場合はどちらも実線と破線の正三角形 2 個あるから,

共に $k=2$ である。

以上, まとめると,

$$k = 24 + 14 + 12 + 12 + 2 + 2 = 66 \text{ 個}$$

となる。



(4) この 19 個の点の中の 3 点を選び三角形を作る。このとき三角形は全部で何個できるか。

(形, 大きさ, 位置が異なる三角形は区別する。)

[解]

19 個の点から 3 点を任意に選ぶ場合の数は, ${}_{19}C_3 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 969$ 通りである。

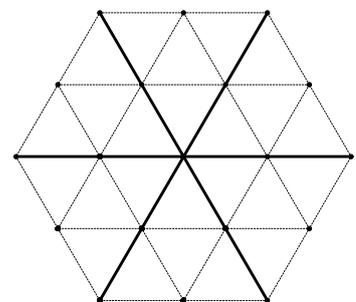
ここから, 3 点が同一直線上に並ぶ場合を除外すれば良い。

除外する場合を一直線上に並ぶ点の個数 (3~5 個) で分類して考察する。

(1) 5 点が一直線上に並ぶ場合は 3 通りある。

その各々に対して, ${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ 通りあるから,

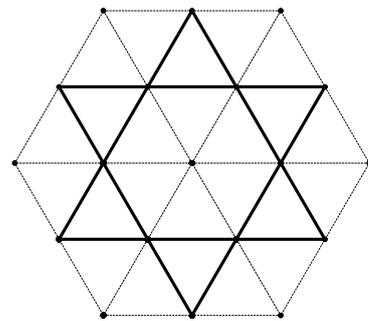
$$3 \times {}_5C_3 = 3 \times 10 = 30 \text{ 通り}$$



(2) 5 点は並ばないが、4 点が一直線上に並ぶ場合は 6 通りある。

その各々に対して、 ${}_4C_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ 通りであるから、

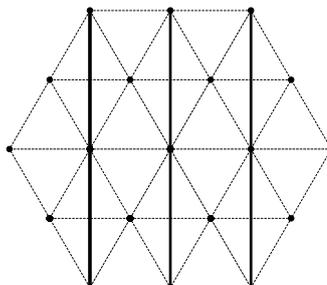
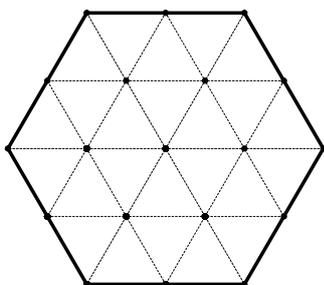
$$6 \times {}_4C_3 = 6 \times 4 = 24 \text{ 通り}$$



(3) 5 点や 4 点は並ばないが、3 点が一直線上に並ぶ場合について考える。

まずその 3 点の並び方を分類する。

(3-1) 3 点が均等に距離 1 で並んでいる場合は、6 通りある。(下左図)



(3-2) 3 点が均等に距離 $\sqrt{3}$ で並んでいる場合は、鉛直に並行なものは 3 通りある。(上右図)

同様に右上がり,左上がりのもそれぞれ 3 通りあり、合計 9 通りである。

(3-3) 上記(3-1,3-2)以外に等間隔でない場合も含めても、3 点が一直線上に並ぶ場合はない。

以上、まとめて $6+9=15$ 通りであるから、

$$15 \times {}_3C_3 = 15 \times 1 = 15 \text{ 通り}$$

以上すべてまとめて、19 個の点から 3 点を選んでできる三角形は全部で、

$$969 - (30 + 24 + 15) = 969 - 69 = 900 \text{ 個}$$

(5) この 19 個の点から 6 点を選んで正六角形を作る。このとき正六角形は何個できるか。

[解]

元々の図形が辺長 2 の正六角形であるから、6 点を選んでできる正六角形の辺長 u は、 $u \leq 2$ である。

したがって、考えられる場合は、 $u = 1, \sqrt{3}, 2$ の 3 通りである。

・ $u = 1$ の場合 (右上図)

正六角形($u = 1$)の中心 Y として 7 個の点 (白丸) が考えられる。

・ $u = \sqrt{3}, 2$ の場合 (右下図)

正六角形は、明らかにそれぞれ 1 個である。(右図の実線と破線)

以上により、 $7+2=9$ 個

