方べきの定理

ラザレ・カルノーによる「方べきの定理の統一」

堀部　和経

堀部数学模型研究所代表，大同大学・愛知県立春日井東高等学校・ＮＳＭ＆Ｄ非常勤講師

２０２１／１／６

　方べきの定理は、次のように２つの場合に分けて解説される場合が多い。

**［１］方べきの定理（点Pが円Oの外部にある場合）**

図１



　定円Oとその外部にある定点Pに対し、図の様に点Tは、点Pから円Oに引いた接線の接点とする。また、点Pを通り円Oとそれぞれ2点で交わる2直線の交点をA,BおよびC,Dとする。

このとき、次の等式が成り立つ。



証明は簡単であるので省略する。（図１）

**［２］方べきの定理（点Pが円Oの内部にある場合）**



図２

　定円Oとその内部にある定点Pに対し、点Pを通る2直線と円Oとの交点をA,BおよびD,Dとする。

このとき、次の等式が成り立つ。



この証明についても省略する。（図２）

　これら２つの定理は、次のようにも表現されることもある。

円Oの半径と線分OPの長さが固定されているのなら、点Pを通る任意の直線ABに対して、

［１］　　　　　　［２］　

　実はこの２つの場合、ある補助線を考えることで全く同じ性質であることがわかる。

　以下、図１に補助線（定円）を加えた図をで説明をする。（図３）

　円Oの同心円で、点Pを通るものを円O’とする。(太い線で表している)　直線PAと円O’との交点をQとする。このとき、２つの同心円の半径を、とおく。

また、明らかに･･･①であることに注意しておく。



図３

［１］の方べきの定理より





①







図４

となる。

その上で、図３から円Oなど消去した図を考える。（図４）

すると、



（元の定理［２］と点の名称が異なっているので注意）

　以上をまとめると（図５）、

図５





　また、この性質の重要な点は、･･･①の変形である。

　方べきの定理の２つの場合の統一的見方は、２同心円と１直線によってできる「すき間」（〇印）の長さが同じ であることから理解できる。さらに（鎖線）の長さが同じと見れば等式を直接変形できるので、より理解しやすいであろう。

参考文献　Eli Maor, Eugen jost (著)「美しい幾何学」高木隆司 (監修, 訳),平澤美可三 他(訳) 丸善出版

（wikiによれば）Lazare Nicolas Marguerite Carnotは、1753年- 1823年　フランスの軍人、数学者