方べきの定理

ラザレ・カルノーによる「方べきの定理の統一」

堀部　和経

堀部数学模型研究所代表，大同大学・愛知県立春日井東高等学校・ＮＳＭ＆Ｄ非常勤講師

２０２１／１／６

方べきの定理は、次のように２つの場合に分けて解説される場合が多い。

［１］方べきの定理（点Ｐが円０の外部にある場合）

定円 O とその外部にある定点 P に対し、図の様に点 T は、点 P から円 O に引いた接線の接点とする。また、点 P を通り円 O とそれぞれ 2 点で交わる 2 直線の交点を A,B および C,D とする。

このとき、次の等式が成り立つ。

$$PT^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

証明は簡単であるので省略する。(図１)

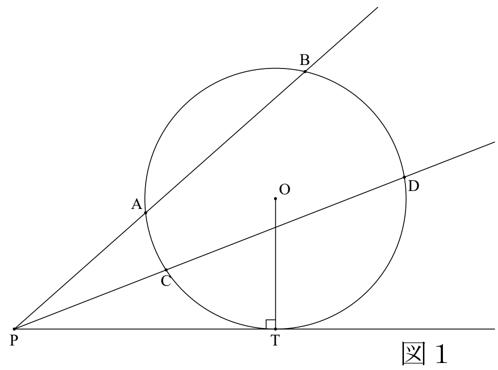

図１

［２］方べきの定理（点Ｐが円０の内部にある場合）

定円 O とその内部にある定点 P に対し、点 P を通る 2 直線と円 O との交点を A,B および D,D とする。

このとき、次の等式が成り立つ。

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

この証明についても省略する。(図２)

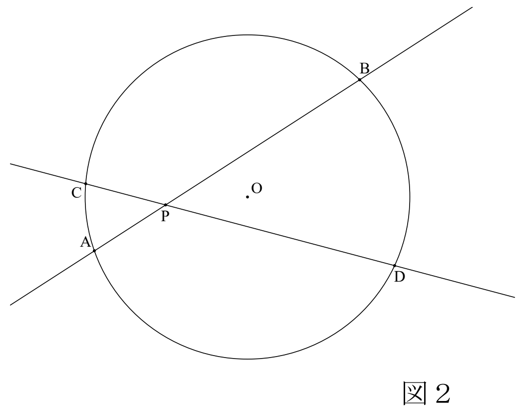

図２

これら２つの定理は、次のようにも表現されることもある。

円 O の半径と線分 OP の長さが固定されているのなら、点 P を通る任意の直線 AB に対して、

［１］　$PA \cdot PB = PT^2 = \left(一定\right)$　　　［２］　$PA \cdot PB = \left(一定\right)$

実はこの２つの場合、ある補助線を考えることで全く同じ性質であることがわかる。

以下、図１に補助線（定円）を加えた図をで説明をする。（図３）

円 O の同心円で、点 P を通るものを円 O’とする。(太い線で表している)　直線 PA と円 O’との交点を Q とする。このとき、２つの同心円の半径を、$\mathrm{OP} = a,\ \mathrm{OT} = b\ (a > b)$ とおく。

また、明らかに $\mathrm{PA} = \mathrm{BQ}$ ･･･①であることに注意しておく。

［１］の方べきの定理より

$$a^2 - b^2 = \mathrm{PT}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

$$= \mathrm{PA}\cdot(\mathrm{PA}+\mathrm{AB})$$

$\Downarrow$ ①

$$= \mathrm{AP}\cdot(\mathrm{AB}+\mathrm{BQ})$$

$$= \mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}$$

となる。

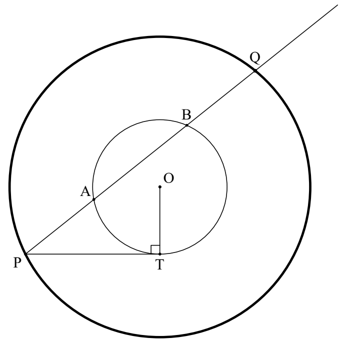

図３

その上で、図３から円 O など消去した図を考える。（図４）

すると、

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ} = a^2 - b^2 = (\text{一定})$$

（元の定理［２］と点の名称が異なっているので注意）

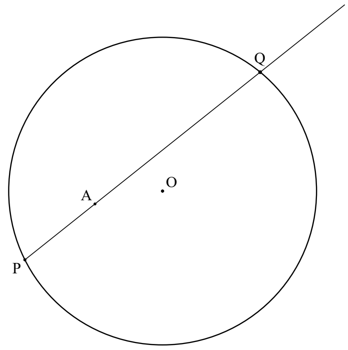

図４

以上をまとめると（図５）、

$$\mathrm{PA}\cdot\underline{\mathrm{PB}} = \mathrm{AP}\cdot\underline{\mathrm{AQ}} = \mathrm{PT}^2 = a^2 - b^2 = (\text{一定})$$

また、この性質の重要な点は、$\mathrm{PA} = \mathrm{BQ}$ ･･･①の変形である。

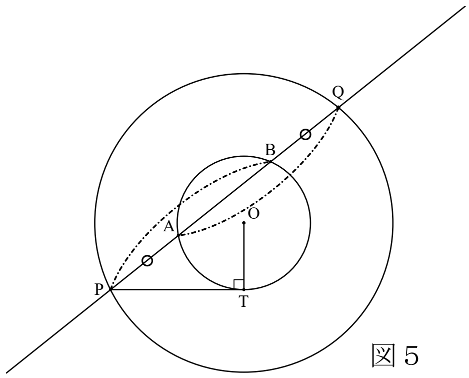

図５

方べきの定理の２つの場合の統一的見方は、２同心円と１直線によってできる「すき間」（〇印）の長さが同じ $\mathrm{PA} = \mathrm{BQ}$　であることから理解できる。さらに（鎖線）の長さが同じ $\underline{\mathrm{PB}} = \underline{\mathrm{AQ}}$ と見れば等式を直接変形できるので、より理解しやすいであろう。

参考文献　Eli Maor, Eugen jost (著)「美しい幾何学」高木隆司（監修, 訳),平澤美可三 他(訳）丸善出版

（wiki によれば）Lazare Nicolas Marguerite Carnot は、1753 年- 1823 年　フランスの軍人、数学者